UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Inverze elementárních funkcí

Inversion of elementary functions

Autor: Tomáš Vitásek

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous

Praha 2013

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Derka Pilouse.V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

Souhlasím se zveřejněním bakalářské práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

Práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Souhlasím s uložením své bakalářské práce v databázi Theses.

V Praze dne 28. června 2013 ....

Tomáš Vitásek

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Derkovi Pilousovi, za projevenou ochotu a mnoho cenných rad a připomínek, které mi pomohly realizovat tuto práci.

Abstrakt

Cílem bakalářské práce je ukázat studentům učitelství matematiky a učitelům matematiky vztah mezi elementárními funkcemi a inverzními funkcemi k nim, ukázat postup při hledání inverzní funkce k elementární funkci a ukázat možné postupy při návrhu úloh na hledání inverzní funkce. V kapitole „Zobrazení“ definuji a vysvětluji pojmy, které úzce souvisí s elementárními funkcemi a inverzními funkcemi, které jsou využívány v dalších částech. Dále diskutuji základní vlastnosti inverzních funkcí. V kapitole „Inverzní funkce k elementárním funkcím“ diskutuji invertibilitu elementárních funkcí a popisuji postup řešení úloh na hledání inverzní funkce k elementární funkci. V kapitole „Návrhy úloh“ poté s využitím předchozích poznatků ukazuji postup při návrhu úlohy žádané obtížnosti.

Klíčová slova: elementární funkce, invertibilní funkce, inverzní funkce.

Abstract

The main point of the bachelor thesis is to show mathematics students and teachers the relation between elementary function and its inverse function, the approach how to find the inverse function and possible processes in designing inverse function tasks. In the chapter "Zobrazení", I define and explain necessary terms, which are used in various parts of the thesis. Further, I discuss basic features of inverse functions. In the chapter "Inverzní funkce k elementárním funkcím" first I discuss the invertibility of elementary functions, and then I describe the process of solving inverse function tasks in detail. In the chapter "Návrhy úloh" I show the proces of designing the task with defined difficulty, using the previously described knowledge.

Keywords: elementary function, invertible function, inverse function.

Obsah

Seznam použitého značení

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}_0^+$	množina nezáporných reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	zobecněná množina reálných čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel (kladných celých)
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel s nulou
$A \to B$	zobrazení z množiny A do množiny B
$f \restriction_M$	restrikce zobrazení f na množinu M
$f(C)$	obraz množiny C při zobrazení f
$f_{-1}(D)$	vzor množiny D při zobrazení f
$f \circ g$	složení vnějšího zobrazení f a vnitřního zobrazení g
f^{-1}	inverzní funkce k funkci f
$\mathcal{E}$	množina elementárních funkcí
I	interval
$P(x)$	polynom jedné proměnné x

Úvod

Při výběru tématu této práce jsem byl ovlivněn svou dřívější prací „Elementární funkce a definiční obor“. Jelikož jsem chtěl pokračovat s tématem týkajícím se elementárních funkcí a zároveň pracovat na tématu, které je blízké nejen vysokoškolským, ale také středoškolským studentům, téma inverzních funkcí se nabízelo. Zároveň toto téma není v dostupné literatuře podrobně a souhrnně zpracováno. V jedné části práce se budu zabývat obecnými vlastnostmi inverzních funkcí. V dalších částech poté konkrétním úlohám na hledání inverzní funkce k elementární funkci a návrhu úloh s gradující obtížností řešení. Práce by měla být psána tak, aby ji mohl porozumnět maturant z matematiky na střední škole, přesto, že v některých ohledech přesahuje úroveň učiva probíraného na střední škole.

Poznámka. V práci jsou použity výňatky z mé předešlé práce „*Elementární funkce a definiční obor*“[10]. Důvodem je podobný charakter práce, který vyžaduje podobný teoretický základ. Jedná se o části 1.1, 1.2.1, 1.2.3 a 1.2.4. Z důvodu přehlednosti samotného textu uvádím odkaz na literaturu zde.

Kapitola 1

Zobrazení a funkce

1.1 Zobrazení

V této kapitole se budeme věnovat především zavedení základních pojmů, které budeme dále využívat. Nejdříve definujeme zobrazení, které je pojmem obecnějším než funkce a definici funkce v sobě obsahuje jako speciální případ.

Definice 1 (Zobrazení)**.** Řekneme, že $f \subset A \times B$ je zobrazení z množiny A do množiny B a píšeme $f : A \to B$, pokud platí $[x, y_1] \in f \wedge [x, y_2] \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. Potom f nazýváme zobrazení z A do B. Budeme ho značit $f : A \ \to B$[i].

Značení. Zápis funkce, jako množiny uspořádaných dvojic, je z matematického hlediska naprosto postačujícím. Z historických důvodů však budeme užívat i jiná značení, která jsou tradičně využívána. Místo $[x, y] \in f$ budeme na některých místech používat zápis $f : y = f(x)$, nebo označení $x \mapsto y$, jehož výhodou je, že v takovémto zápisu můžeme zobrazení zapsat, aniž bychom jej pojmenovali.

[i]Definice je pro naše potřeby upravena a oproti klasické defínci [9, str. 33] připouští i zobrazení prázdné množiny na prázdnou množinu. Takové zobrazení budeme nazývat prázdným zobrazením a zavádím ho zde proto, aby množina elementárních funkcí (viz. definice 20) byla uzavřena na své operace.

Zobrazení je tedy formálně množina uspořádaných dvojic, které nám říkají, kterému prvku z množiny A je přiřazen který prvek z množiny B. Důležitým požadavkem definice je, aby množina těchto dvojic neobsahovala dvě různé dvojice se stejným prvním prvkem (zjednodušeně říkáme, že „ke každému x existuje nejvýše jedno y“).

Definice 2 (Definiční obor a obor hodnot)**.** Je-li f zobrazení z množiny A do množiny B, potom
definiční obor f je množina $\mathcal{D}(f) := \{x; x \in A \wedge \exists y \in B : ([x, y] \in f)\}$,
obor hodnot f je množina $\mathcal{H}(f) := \{y; y \in B \wedge \exists x \in A : ([x, y] \in f)\}$ [2, str. 71].

Poznámka. Definiční obor je neoddělitelnou součástí zobrazení. Má-li zobrazení předpis, rovnost zobrazení je rovnost definiční množiny a rovnost předpisů na těchto množinách. Proto zobrazení

$$x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad x \mapsto x^2, x \in (0; 2)$$

nejsou shodná zobrazení. Naopak

$$x \mapsto x, x \in \langle 0; \infty) \quad \text{a} \quad x \mapsto |x|, x \in \langle 0; \infty)$$

jsou shodná zobrazení, jelikož pro nezáporná čísla je absolutní hodnotu možné vynechat.

Tato poznámka nás vede k pojmu restrikce zobrazení, který definujeme takto:

Definice 3 (Restrikce zobrazení)**.** Řekneme, že g je restrikce zobrazení f na množinu M, jestliže $g \subset f$ a $\mathcal{D}(g) = M \cap \mathcal{D}(f)$. Budeme ji značit $g = f \restriction_M$[ii].

Restrikce zobrazení je nezbytná pro konstrukci inverzní funkce u funkcí, které nejsou prosté na celém definičním oboru. Pokud není funkce prostá, inverzní funkce k ní neexistuje. Proto budeme u takových funkcí hledat restrikce, na kterých funkce prostá je. K těmto restrikcím poté inverzní funkci.

[ii]po konzultaci s Mgr. Derkem Pilousem

Příkladem je například funkce „druhá odmocnina“, jako inverzní k funkci „druhá mocnina“, zúžené na množinu nezáporných reálných čísel.

Definice 4. Zobrazení $f : A \to B$, pro které existuje $b \in B$ tak, že $\mathcal{H}_f = \{b\}$, se nazývá **konstantní** (budeme značit K_b). Jestliže pro $f : A \to A$ platí: $\forall x \in A : f(x) = x, x \in A$, nazývá se f **identické zobrazení** (krátce **identita**) na A (budeme značit id, resp. id_A) [9, str. 35] .

Definice 5. Nechť $f : A \to B$. Je-li $[x, y] \in f$, nazýváme x vzorem y a y obrazem x při zobrazení f. Obrazem množiny $C \subset A$ při zobrazení f rozumíme množinu $f(C) := \{y; \exists x \in C : [x, y] \in f\}$. Vzorem množiny $D \subset B$ při zobrazení f rozumíme množinu $f_{-1}(D) := \{x; \exists y \in D : [x, y] \in f\}$ [9, str. 34].

Vysvětlení. Obraz množiny C je množina všech prvků z oboru hodnot přiřazených zobrazením f prvkům množiny C. Vzor množiny D je množina všech prvků z definičního oboru, které f zobrazuje do D.

Dále si definujeme další důležitý pojem, kterým je skládání zobrazení. Jedná se o první funkční operaci, kterou budeme používat.

Definice 6 (Složené zobrazení)**.** Nechť f a g jsou zobrazení. Potom složené zobrazení $f \circ g$ je zobrazení h definované předpisem

$$h = \{[x, z]; \exists y : [x, y] \in g \wedge [y, z] \in f\}.$$

Poznámka. Skládání zobrazení je asociativní ($(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$), ale není komutativní (obecně neplatí $f \circ g = g \circ f$).

Jedná se o operaci, která nám umožňuje ze základních zobrazení vytvářet nová. Operace skládání budeme v mnoha příkladech využívat.

Lemma 1. $\mathcal{D}(f \circ g) = g_{-1}(\mathcal{D}(f))$.

Důkaz. Plyne přímo z definice složeného zobrazení. $\square$

Poslední definice, kterou můžeme v rámci zobrazení vyřknout, aniž bychom museli využít speciálních vlastností funkcí, je definice inverzního zobrazení. Pro tuto definici však musíme nejdřív zavést pojem prostého zobrazení a zobrazení na množinu (surjektivní zobrezení).

Definice 7 (Prosté zobrazení)**.** Řekneme, že f je **prosté zobrazení** množiny A do množiny B, jestliže

1. $f : A \to B$ a
2. $\forall x_1 \in A\, \forall x_2 \in A\, \forall y \in B : ([x_1, y] \in f \wedge [x_2, y] \in f \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Poznámka. Z bodu dva je vidět, že se jedná o analogii definice zobrazení. Zde je požadavek symetrický k požadavku v definici zobrazení. Je třeba, aby „ke každému y existovalo nejvýše jedno x“.
Ve středoškolských učebnicích se častěji vyskytuje ekvivalentní definice prosté funkce $\forall x_1 \in A\, \forall x_2 \in A : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ [5, str. 35].

Definice 8 (Surjektivní zobrazení)**.** Řekneme, že f je **zobrazení množiny** A **na množinu** B, jestliže

1. $f : A \to B$ a
2. $\mathcal{H}(f) = B$.

Nyní již můžeme definovat inverzní zobrazení.

Definice 9 (Inverzní zobrazení)**.** Nechť f je prosté zobrazení množiny A na množinu B. Řekneme, že f^{-1} je **inverzní zobrazení** k zobrazení f, jestliže $f^{-1} = \{[x, y]; [y, x] \in f\}$ [2, str. 77].

1.2 Funkce

1.2.1 Definice

V předešlé části jsme definovali několik pojmů týkajících se zobrazení a jeho vlastností. Pro naši práci je však potřeba pojmu konkrétnějšího, jelikož zobrazení je pojmem příliš širokým. Příkladem zobrazení je například zobrazení množiny všech ženatých mužů na množinu jejich manželek[iii]. U takového zobrazení mají smysl námi již definované pojmy. Definičním oborem je množina všech ženatých mužů, oborem hodnot množina všech vdaných žen. Složíme-li toto zobrazení se zobrazením vdaných žen na množinu jejich matek (označíme matky), složení těchto zobrazení má taktéž smysl. Složené zobrazení matky $\circ$ manželství je zobrazení, které zobrazuje množinu všech ženatých mužů na množinu matek vdaných žen. Toto zobrazení můžeme nazvat „tchýně". Jelikož však cílem našeho zkoumání jsou elementární funkce jakožto nejvýznamnější množina funkcí, se kterými se ve výuce matematiky pracuje, je proto na místě definovat si pojem funkce jako speciálního zobrazení.

Definice 10. Zobrazení libovolné množiny A do nějakého číselného oboru budeme obecně nazývat **funkce**. Podrobněji **reálnou funkcí** budeme rozumět zobrazení do $\mathbb{R}$, **komplexní funkcí** zobrazení do $\mathbb{C}$. Je-li navíc $A \subset \mathbb{R}$, budeme takovou funkci nazývat podrobněji **reálnou funkcí reálné proměnné** [9, str. 105].

Úmluva. Nebude-li řečeno jinak, budeme pojmem funkce rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Poznámka. Jelikož funkce je jen speciálním zobrazením, všechny dříve definované vlastnosti platí i pro funkce, nemusíme je tedy znovu definovat. v tomto smyslu budeme hovořit i o inverzní funkci.

1.2.2 Vlastnosti inverzních funkcí

V této sekci si popíšeme některé vlastnosti inverzních funkcí. Jak vyplývá již z definice, inverzní funkce existuje pouze k funkci prosté. Nicméně i u funkce, která prostá není, můžeme o inverzní funkci uvažovat. Musíme však zúžit definiční obor této funkce tak, aby v této množině funkce byla prostá.

[iii] Uvažujeme monogamní společnost

Z definice inverzní funkce poté vyplývá, že definičním oborem funkce f^{-1} inverzní k funkci f bude obor hodnot $\mathcal{H}(f)$ funkce f a oborem hodnot funkce f^{-1} je definiční obor $\mathcal{D}(f)$ funkce f.

Věta 1. *Pro každou prostou funkci f platí*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Důkaz.

$$[x, y] \in f \Leftrightarrow [y, x] \in f^{-1} \Leftrightarrow [x, y] \in (f^{-1})^{-1}.$$

$\square$

Věta 2.

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \text{ pro } x \in \mathcal{D}(f^{-1}), \quad (f^{-1} \circ f)(y) = y, \text{ pro } y \in \mathcal{D}(f).$$

Důkaz. Mějme $[x, y] \in f$. Potom $[y, x] \in f^{-1}$ a z definice složeného zobrazení $[x, x] \in (f \circ f^{-1})$, což můžeme zapsat také jako $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Jedná se tedy o funkci identickou. v druhém případě můžeme funkci zapsat podle věty 1 jako $f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1}$. Dokážeme tedy stejně jako v první části. $\square$

Věta 3. *Každá inverzní funkce je prostá.*

Důkaz. Mějme prostou funkci f. Nechť $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(f^{-1}), y_1 \neq y_2$. Označme $f^{-1}(y_1) = x_1$ a $f^{-1}(y_2) = x_2$, takže $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Kdyby $x_1 = x_2$, pak $f(x_1) = f(x_2)$ (z definice zobrazení), tedy $y_1 = y_2$, což neplatí. Proto $x_1 \neq x_2$, tedy $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, takže f^{-1} je prostá. $\square$

Abychom mohli mluvit o dalších vlastnostech, je třeba zavést několik dalších pojmů.

Definice 11. [2, str. 109] Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměné a M množina taková, že $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že

1. funkce f je **rostoucí** v množině M, jestliže

$$\forall x_1,\, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

2. funkce f je **klesající** v množině M, jestliže

$$\forall x_1,\, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Poznámka. Z této definice je na první pohled vidět, že funkce rostoucí, či klesající v celém svém definičním oboru (souhrnně říkáme funkce ryze monotónní) je prostá, tudíž k ní existuje funkce inverzní.

Nyní tedy můžeme hovořit o monotonii inverzní funkce v závislosti na funkci původní.

Věta 4. *Inverzní funkce k rostoucí funkci je rostoucí, inverzní funkce ke klesající funkci je klesající.*

Důkaz. Budeme předpokládat, že původní funkce f je rostoucí. Nechť platí $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(f^{-1}), y_1 < y_2$. Položme $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$, takže $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Kdyby bylo $x_1 \geq x_2$, pak $f(x_1) \geq f(x_2)$ (funkce f je rostoucí), tedy $y_1 \geq y_2$, což neplatí. Je tedy $x_1 < x_2$, tj. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, takže f^{-1} je rostoucí. Pro klesající funkci je důkaz obdobný[1, str. 94]. □

Další vlastností, kterou můžeme u inverzní funkce zkoumat, je její konvexita, respektive konkavita.

Definice 12. [2, str. 113] Nechť f je reálná funkce jedné reálné proměnné a M množina taková, že $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že

1. funkce f je **konvexní** v množině M, jestliže
$$\forall x_1,\, x_2,\, x_3 \in M : x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_2 - x_3},$$
2. funkce f je **konkávní** v množině M, jestliže
$$\forall x_1,\, x_2,\, x_3 \in M : x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_2 - x_3}.$$

Věta 5. *Inverzní funkce f^{-1} ke klesající konvexní (konkávní) funkci f je funkce konvexní (konkávní).*
Inverzní funkce f^{-1} k rostoucí konvexní (konkávní) funkci f je funkce konkávní (konvexní).

Důkaz. Dokážeme nejdříve pro klesající funkci. Předpokládejme, že funkce f je konvexní klesající a mějme $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D}(f) : x_1 < x_2 < x_3$. Označíme $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$. Potom $f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2, f^{-1}(y_3) = x_3$. Z definice klesající funkce platí $f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$, tedy $y_3 < y_2 < y_1$. Chceme tedy, aby platilo

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_3)}{y_2 - y_3} < \frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

Dokážeme převedením pomocí ekvivalentních úprav na předpoklad tvrzení.

$$\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_3)}{y_2 - y_3} &< \frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} \\
\frac{x_2 - x_3}{f(x_2) - f(x_3)} &< \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \\
\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} &< \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \\
\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} &> \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.
\end{aligned}$$

Jelikož funkce f je konvexní, je konvexní i funkce f^{-1}. Pro klesající konkávní funkci dokážeme analogicky.

Nyní dokážeme tvrzení pro rostoucí funkci. Předpokládejme, že funkce f je konvexní rostoucí a mějme $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D}(f) : x_1 < x_2 < x_3$. Označíme $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$. Potom $f^{-1}(y_1) = x_1, f^{-1}(y_2) = x_2, f^{-1}(y_3) = x_3$. Z definice rostoucí funkce platí $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, tedy $y_1 < y_2 < y_3$. Chceme tedy, aby platilo

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} < \frac{f^{-1}(y_3) - f^{-1}(y_2)}{y_3 - y_2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} &< \frac{f^{-1}(y_3) - f^{-1}(y_2)}{y_3 - y_2} \\
\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} &< \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \\
\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} &> \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.
\end{aligned}$$

Jelikož funkce f je konvexní, je funkce f^{-1} konkávní. Pro rostoucí konkávní funkci dokážeme analogicky. $\square$

Tímto jsme shrnuli základní vlastnosti inverzních funkcí. Některé z nich také využijeme v dalších částech práce.

1.2.3 Funkční operace

Jelikož číselné obory jsou speciálními strukturami s definovanými číselnými operacemi, můžeme definovat další operace a vlastnosti, které by v případě obecného zobrazení neměly smysl.[iv]

Definice 13. Nechť f a g jsou funkce. Pak nazýváme

(a) **součtem funkcí** f a g funkci

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(b) **rozdílem funkcí** f a g funkci

$$(f-g)(x) := f(x)-g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(c) **součinem funkcí** f a g funkci

$$(fg)(x) := f(x)g(x), x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$

(d) **podílem funkcí** f a g funkci

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \setminus \{x; g(x)=0\}.$$

Souhrnně tyto operace nazveme **funkčními operacemi** [2, str. 103].

Poznámka. Mezi funkční operace bývá zahrnována i unární operace absolutní hodnota, tu však v rámci elementárních funkcí můžeme zkonstruovat složením sudé mocniny a stejné odmocniny. Stejně tak násobení funkce konstantou lze nahradit funkční operací násobení, kde jedna z funkcí je funkcí konstantní[v].

[iv]Například pro již zmiňovaná zobrazení „manželství“ a „matky“ by žádná z níže uvedených operací neměla smysl.

[v]V knize Matematika pro ekonomické fakulty [2, str. 103] jsou tyto operace zahrnuty mezi funkční operace.

Poznámka. Sčítání a násobení funkcí je asociativní i komutativní, naopak odčítání a dělení nejsou ani komutativní, ani asociativní.

Definice 14. Množinu funkcí generovaných množinou funkcí F (tzv. množina generátorů) a množinou binárních operací O (značíme$\langle F; O\rangle$) definujeme takto:

1. $F \subset \langle F; O\rangle$,
2. $f, g \in \langle F; O\rangle \wedge \otimes \in O \Rightarrow f \otimes g \in \langle F; O\rangle$,
3. Každou funkci z $\langle F; O\rangle$ lze z F zkonstruovat konečným počtem kroků 2.

Tato terminologie a značení jsou převzaty z algebry, kde se $\langle \dots \rangle$ používá pro lineární obal množiny.

1.2.4 Elementární funkce

Jak víme z definice 1, zobrazení, a tedy i funkce, je množina dvojic. Z abstraktně matematického hlediska je taková definice postačující, z didaktického hlediska nás však bude zajímat, jak můžeme takovou funkci zadat. Pravděpodobně nejjednodušším způsobem zadání může být zadání výčtem. Nicméně u takové funkce by nemělo hledání definičního oboru smysl, jelikož by byl znám již přímo ze zadání. Také bychom v takovém případě nemohli zadávat nekonečné funkce (ve smyslu nekonečnosti zobrazení jako množiny dvojic). Proto pro nás bude stěžejní zadání funkce předpisem, a to především předpisem konstruktivním. Zadání nekonstruktivní je sice také zadáním korektním, nicméně pro naše příklady je zcela nevhodné. Takové zadání se taktéž prakticky nepoužívá ve školách.

Nejčastěji používanými (alespoň ve výuce matematiky) reálnými funkcemi jedné reálné proměnné jsou tzv. **elementární funkce**. Systém elementárních funkcí vybudujeme pomocí základních elementárních funkcí a funkčních operací. Pojmy konstantní a identické funkce jsou nám již známy z definice pro zobrazení, tudíž je nemusíme definovat znovu. Definujeme si tedy další funkce, pomocí kterých poté můžeme definovat všechny funkce elementární.

Definice 15. Mocninnou funkcí (značíme id^k) rozumíme každou funkci definovanou

$$\mathrm{id}^k := \prod_{i=1}^{k} \mathrm{id}, k \in \mathbb{N}.$$

Definice 16. Odmocninnou funkcí (značíme $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}}$) nazveme funkci definovanou

1. pro k liché: $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}} := (\mathrm{id}^k)^{-1},\ k \in \mathbb{N},\ k > 2$,
2. pro k sudé: $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}} := (\mathrm{id}^k \restriction_{\langle 0;\infty)})^{-1},\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$.

Poznámka. Pro sudá k jsme museli zúžit definiční obor id^k tak, aby byla tato funkce prostá. Jinak bychom nemohli $\mathrm{id}^{\frac{1}{k}}$ zavést jako inverzi k id^k.

Jelikož exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce jsou tzv. funkce transcendentní, nelze je definovat konečným algebraickým výrazem. K definici funkce **exponenciální** využijeme součtu nekonečné řady, ostatní pak definjeme pomocí exponenciální funkce. Nejdříve definujeme základní exponenciální funkci, kterou označíme exp.

Definice 17. Exponenciální funkci definujeme

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ pro každé } x \in \mathbb{C}.$$

Přirozený logaritmus definujeme

$$\ln := (\exp \restriction_{\mathbb{R}})^{-1},$$

obecnou exponenciální funkci (označíme $\exp_a$) potom definujeme

$$\exp_a := \exp(\mathrm{id} \cdot \ln a) \text{ a}$$

obecný logaritmus o základu a ($\log_a$) definujeme

$$\log_a := (\exp_a \restriction_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

Značení. Funkční předpis základní exponenciální funkce ($\exp(x)$) budeme psát $f: y = \mathrm{e}^x$, funkční předpis obecné exponenciální funkce ($\exp_a(x)$) potom $f: y = a^x$.[vi]

Definice 18. Goniometrické funkce $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$ definujeme předpisem

$$\begin{aligned} \sin x &:= \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}), \\ \cos x &:= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}), \\ \mathrm{tg}\, x &:= \frac{\sin x}{\cos x} \text{ a} \\ \mathrm{cotg}\, x &:= \frac{\cos x}{\sin x}, \end{aligned}$$

kde Re značí reálnou část komplexního čísla a Im imaginární část komplexního čísla.

Definice 19. Cyklometrické funkce $\arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arccotg}$ definujeme [6, str. 87]

$$\begin{aligned} \arcsin &:= \left(\sin \restriction_{\left\langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle}\right)^{-1}, \\ \arccos &:= \left(\cos \restriction_{\langle 0; \pi \rangle}\right)^{-1}, \\ \mathrm{arctg} &:= \left(\mathrm{tg} \restriction_{\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)}\right)^{-1} \text{ a} \\ \mathrm{arccotg} &:= \left(\mathrm{cotg} \restriction_{(0; \pi)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Tímto jsme definovali všechny funkce, které budeme pro definici elementárních funkcí potřebovat[vii]. Můžeme tedy definovat množinu elemetárních funkcí.

Definice 20 (Elementární funkce)**.** Množninu $\langle F_E; O_E \rangle$, kde

1. $F_E = \{\mathrm{K}_b, \mathrm{id}, \mathrm{id}^{\frac{1}{k}}, \exp, \log, \sin, \arcsin\}$,
2. $O_E = \{+; -; \cdot; \div; \circ\}$,

[vi] e je tzv. Eulerovo číslo. Jedná se o transcendentní číslo. $\mathrm{e} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \doteq 2,718281\ldots$

[vii] Definovali jsme jich dokonce více, než je třeba, jak si ukážeme později.

nazýváme množinou elementárních funkcí (budeme značit $\mathcal{E}$).

Vysvětlení. Elementární funkce jsou takové funkce, které získáme z funkcí z F_E pomocí konečného počtu operací z O_E.

Úmluva. Funkční operace skládání ($\circ$) bude mít v našich příkladech nejvyšší precedenci. Z aritmetických operací má $\cdot$ a $\div$ vyšší precedenci než $+$ a $-$.

Příklad 1. Dokažte, že $x \mapsto \sin{(x+1)^2}$ je elementární funkce.

Řešení. $x \mapsto x + 1$ je součet identické funkce id a konstatní funkce. Výraz $x \mapsto (x+1)^2$ získáme složením vnější funkce $x \mapsto x \cdot x$ a vnitřní $x \mapsto x+1$. Výsledný výraz $x \mapsto \sin{(x+1)^2}$ je potom složení vnější goniometrické funkce $x \mapsto \sin x$ a vnitřní $x \mapsto (x+1)^2$. Vyjádřili jsme tedy tuto funkci z funkcí F_E pomocí operací O_E, jedná se tedy o elementární funkci.
K vyjádření funkce jsme použili funkčních hodnot. Velmi jednoduše také můžeme zapsat tuto funkci přímo pomocí funkčního kalkulu. Potom zapíšeme $f = \sin \circ [(\mathrm{id} + 1)(\mathrm{id} + 1)]$.

Zde je však důležité ukázat, že budeme-li používat v našich příkladech mocninnou funkci id^k, goniometrické funkce $\cos, \mathrm{tg}$ a cotg a cyklometrické $\arccos, \mathrm{arctg}$ a $\mathrm{arccotg}$, mluvíme stále o elementárních funkcích, jelikož tyto funkce můžeme za použití výše uvedených operací vyjádřit pomocí funkcí $\mathrm{id}, \sin$ a $\arcsin$ tak, že zůstaneme uvnitř množiny $\mathcal{E}$.

Věta 6. $\langle F_E \cup \{\mathrm{id}^k, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}, \arccos, \mathrm{arctg}, \mathrm{arccotg}\}; O_E \rangle = \mathcal{E}$.

Důkaz. Čtenáře odkazuji na svoji straší práci[10, str. 19-21]. □

Důležité je však také říci, že množina funkcí F_E je minimální možná, která pomocí operací z O_E generuje všechny elementární funkce, odebereme-li tedy kteroukolli funkci z F_E, množina funkcí $\langle F_E; O_E \rangle$ nebude množinou všech elementárních funkcí[viii].

[viii] viz článek Roberta Rische [8]

1.3 Algebraické funkce

Vzhledem k další části práce je pro nás důležitý pojem algebraická funkce

Definice 21. [11, str. 255] Algebraická funkce jedné proměnné je funkce $y = f(x)$, která vyhovuje rovnici

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots a_0(x) = 0,$$

kde $a_i(x)$ jsou polynomy proměnné x.

Jelikož předmětem této práce jsou především elementární funkce, bude nás zajímat vztah množiny elementárních funkcí a množiny algebraických funkcí. Nejdříve si ukážeme, že množiny mají společné prvky. Například funkci $f : y = x^2 + 7x - 3$ můžeme převést na tvar $x^2 + 7x - 3 - y = 0$, jedná se tedy o elementární funkci a zároveň i o funkci algebraickou. Jelikož y můžeme vždy převést na druhou stranu rovnice jako ve výše uvedeném příkladě, nezáleží na stupni výrazu na pravé straně a každá polynomická funkce je algebraická funkce. Dalším příkladem je funkce $g : y = \frac{x^2+x-5}{3x^2-2x+5}$. Zde můžeme vynásobit rovnici a dostáváme

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 + x - 5}{3x^2 - 2x + 5} \\ 3yx^2 - 2yx + 5y &= x^2 + x - 5 \\ (3y - 1)x^2 - (1 + 2y)x + 5y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Jedná se tedy opět o algebraickou funkci a zároveň o funkci elementární a opět nebude záležet na stupni polynomu v čitateli a jmenovateli funkce a vždy se bude jednat o algebraickou funkci. Ukážeme si ještě jeden typ funkcí, které jsou algebraickými i elementárními zároveň. Jedná se o funkci odmocninnou. Například funkci $h : y = \sqrt[3]{x + 7}$ snadno upravíme na tvar $x + 7 - y^3 = 0$.

Ukázali jsme si tedy, že množina elementárních a algebraických funkcí má neprázdný průnik. Nyní se budeme ptát opačně. Nejdříve, zda každá elementární funkce je i algebraická. Transcendentní elementární funkce[ix]

[ix]Exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce.

algebraické nejsou. Problémem je, zda bez transcendentních funkcí zbydou z elementárních právě algebraické. Pro tuto práci stačí, že tomu tak není procedurálně[x]. Příkladem je funkce $f : y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$, jelikož libovolné umocňování nesníží počet odmocnin v této rovnici.

Opačným problémem je, zda každá algebraická funkce je elementární. Opět nám bude stačit, že z procedurálního hlediska tomu tak není.

Víme totiž, že inverzní funkce k algebraické funkci je opět funkce algebraická. Výraz na levé straně rovnice v definici algebraické funkce je polynom dvou proměnných x a y, tedy funkce s předpisem ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i y^j.$$

Z definice inverzní funkce („prohození x a y") potom dostáváme jako inverzi opět polynom dvou proměnných, jedná se proto opět o algebraickou funkci. Zároveň nedokážeme nalézt inverzní funkci ke každé elementární funkci tak, aby byla opět elementární. Například funkce polynomické vyššího než čtvrtého stupně nejsou již obecně invertibilní v radikálech[xi]. Toto tvrzení pod názvem Abel-Ruffiniho věta je známe z přelomu 18. a 19. století. První důkaz podal roku 1799 italský matematik Alberto Ruffini, jeho důkaz však obsahuje chybu a navíc byl dlouhý přes 500 stran, proto nebyl po svém vzniku akceptován. Úplný důkaz podal až v roce 1823 dánský matematik Henrik Abel [11, str. 254]. Nezávisle na něm dokázal tuto větu také francouzský matematik Evaristé Galois, pomocí jehož teorie se dnes důkaz zpravidla provádí. Tento důkaz však neukazuje, že nelze nalézt kořeny pomocí transcendentních funkcí, tudíž nedokazuje, že elementární inverzní funkce k takovým funkcím neexistují. Nám však postačí, že v současné době není znám postup, který by nám umožnil inverzní funkci nalézt.

[x]Z hlediska algoritmů, které nám jsou k dispozici, nedokážeme tyto funkce převést na tvar algebraické funkce

[xi]Invertibilní v radikálech znamená, že dokážeme inverzní funkci zapsat pomocí identické a odmocninných funkcí a pomocí základních čtyř funkčních operací a operace skládání

Kapitola 2

Inverzní funkce k elementárním funkcím

2.1 Invertibilita elementárních funkcí

Úmluva. Pro zjednodušení a přehlednost budeme v některých případech užívat pojem „inverze funkce“ namísto „inverzní funkce k dané funkci“.

Definice 22. Řekneme, že elementární funkce je invertibilní v elementárních funkcích (dále jen invertibilní), pokud k ní na každém intervalu, kde je prostá, existuje elementární inverzní funkce.

Jak jsme viděli v předchozí kapitole, algebraické funkce mají důležitou vlastnost, a tou je uzavřenost množiny algebraických funkcí na operaci inverze. Nás však zajímají především elementární funkce a ptáme se proto, zda tomu je tak i u elementárních funkcí. Jak jsme si již naznačili v předchozí kapitole, není tomu tak. Příkladem elementární funkce, jejíž inverze není elementární funkce, je například funkce daná předpisem

$$f(x) = x + \ln x.$$

Funkce je v celém definičním oboru rostoucí, tedy prostá, protože identická i logaritmická funkce jsou rostoucí, proto i jejich součet je rostoucí[i]. Inverzní

[i]Důkaz plyne z definice rostoucí funkce

funkce k ní tedy existuje, nicméně není elementární. Důkaz tohoto tvrzení je však velice obtížný a výplývá z vět dokázaných Robertem Rischem[8]. Důležitým pro nás bude nyní následující tvrzení.

Věta 7. *Invertibilita elementární funkce je ekvivalentní s řešitelností rovnice $f(x) + a = 0$, kde $f(x)$ je předpis elementární funkce funkce a a je reálné číslo*

Důkaz. Mějme rovnici $(R) : f(x) + a \;\; = 0$. Pak známe-li f^{-1} je zjevně $f^{-1}(-a)$ řešením rovnice (R). Naopak, máme-li řešení rovnice (R) vyjádřené v závislosti na a elementární funkcí $g(x)$, tedy $x = g(a)$, je

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= -a \\ (f \circ g)(a) &= -a \; / \circ (-\,\mathrm{id}) \\ (f \circ g \circ (-\,\mathrm{id}))(a) &= a \\ f \circ g \circ (-\,\mathrm{id}) &= \mathrm{id} \;\; / f^{-1} \circ \\ g \circ (-\,\mathrm{id}) &= f^{-1}. \end{aligned}$$

Známe-li tedy řešení rovnice (R) dokážeme nalézt inverzni funkce f. □

Při našem hledání inverzních funkcí se omezíme na elementární funkce, jejichž inverzí bude opět elementární funkce. Musíme se tedy ptát, jak takovou funkci obecně poznáme.

Zásadním výsledek v tomto směru odvodil již zmiňovaný Robert Risch v článku „Algebraic properties of the elementary functions of analysis“[8]. Pro komplexní elementární funkci[ii] existuje inverzní funkce v případě, že funkce je konečným složením funkcí $e^x, \ln x$ a invertibilní algebraické funkce x[iii]. U reálných funkcí bude situace trochu jiná. Generátory množiny komplexních elementárních funkcí jsou totiž definovány všude (až na funkci ln,

[ii]Komplexní elementární funkce nejsou hlavním předmětem této práce, proto se jimi zde nezabývám do hloubky a formálně je nezavádím. Čtenáře odkazuji na Diferenciální počet II Vojtěcha Jarníka [4, str. 551-579].

[iii]Funkce goniometrické lze v rámci koplexních funkcí vyjádřit pomocí funkce exponenciální, funkce cyklometrické pomocí funkce logaritmické.

která není definována v nule). Tím pádem je definiční obor takové funkce vždy otevřená množina a nemůže být tedy například konečnou množinou izolovaných bodů, jak je tomu u reálných elementárních funkcí. To nás přivádí k tvrzení, které ukazuje, že pro reálné elementární funkce může inverzní funkce existovat i k jiným funkcím, než je tomu u funkcí komplexních.

Věta 8. *Každá funkce, definovaná právě v konečném počtu bodů, je elementární*

Důkaz. Důkaz této věty provedeme konstrukcí takové funkce. Prázdná funkce je elementární[iv] a inverní funkce k ní je také prázdná funkce, pro nulový počet bodů tedy toto tvrzení platí. Dále tedy tvrzení dokážeme pro konečný nenulový počet bodů. Máme dán konečný počet různých bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a jejich obrazů $y_1, y_2 \ldots, y_n$, ve kterých je funkce definovaná. Nejdříve potřebujeme nalézt funkci, která bude mít v daných bodech danou funkční hodnotu. Vezmeme-li funkci

$$i(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)} y_1.$$

Tato funkce bude mít v bodě x_1 funkční hodnotu y_1, jelikož zlomek

$$\frac{(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)}$$

nabývá v bodě x_1 hodnotu 1 a v bodech $x_2, x_3, \ldots, x_n$ je jeho funkční hodnota 0. Můžeme tedy vzít funkci

$$j(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} y_2,$$

a součet funkcí $i(x)$ a $j(x)$ bude mít v bodě x_1 funkční hodnotu y_1 a v bodě x_2 funkční hodnotu y_2. v bodech $x_3, x_4, \ldots, x_n$ však stále bude funkční hodnota 0. Můžeme proto pokračovat výše uvedeným způsobem dále a hledanou funkcí bude

[iv]Funkci můžeme zapsat například předpisem $f(x) = \sqrt{-\frac{1}{x^2}}$.

$$g(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}y_1 + \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}y_2 + \cdots \\ + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_3)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Zkonstruovali jsme tedy funkci, která má v daných bodech danou funkční hodnotu[v]. Aby byla tato funkce definovaná pouze v konečném počtu bodů, musíme ještě omezit její definiční obor. Ke konstrukci využijeme odmocninné funkce

$$h(x) = 1 + \sqrt{-\prod_{i=1}^{n}(x-c_i)^2}\ ^{[vi]}.$$

Tím jsme nalezli funkci, která má $\mathcal{D}(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Jelikož funkce $h(x)$ má ve všech bodech definičního oboru funkční hodnotu 1, hledanou funcí bude například $f(x) = g(x)h(x)$[vii]. Tato funkce bude elementární funkcí, což lze snadno dokázat stejně jako v příkladu 1. $\square$

Dokázali jsme tedy, že každá funkce definovaná právě v konečném počtu bodů je elementární a zároveň k ní, nebo k jejím restrikcím, dokážeme nalézt funkci inverzní, jelikož známe všechny body definičního oboru i jejich funkční hodnoty. Ke každé funkci definované právě v konečném počtu bodů, nebo jejím restrikcím, tedy dokážeme nalézt inverzní funkci a tato funkce bude také elementární.

Máme-li tedy prostou funkci s konečným definičním oborem, jistě se jedná o funkci elementární a zároveň k ní existuje inverzní funkce, která bude také elementární, aniž by byla v Rischem požadovaném tvaru. Můžeme si ilustrovat takovou situaci na konkrétnějším příkladu, než je tomu ve větě 8.

Příklad 2. Nalezněte inverzi k funkci $f : y = \arcsin(x+1) + \arcsin(x-1)$.

[v] Zkonstruovali jsme tzv. Lagrangeův interpolační polynom.

[vi] Jedná se o upravenou funkci z [10, str. 33].

[vii] Mohli bychom použít také funkci $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$.

Řešení. Definičním oborem funkce je poze jediný bod. $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f) = \{0\}$. Funkční hodnota v jediném bodě, kde je funkce definovaná, je tedy 0. Inverzní funkce k této funkci tak bude existovat a jako předpis můžeme použít předpis samotné funkce f.

V rámci reálných elementárních funkcí je tak situace paradoxně složitější, než v rámci funkcí komplexních a jednoduchá poučka, jako uvádí Risch, neexistuje. My se však speciálními případy elementárních funkcí, jako ve větě 8 zabývat nebudeme, jelikož předmětem této části je především algebraický postup nalezení inverze z jejího předpisu, což je možné právě u množiny funkcí odvozených Rischem.

2.2 Hledání inverzní funkce k elementárním funkcím

V této části si popíšeme postup, jak nalézt inverzní funkci k zadané elementární funkci. Ze začátku však musíme zmínit všechna omezení pro hledání inverzní funkce. Jak již plyne z definice inverzní funkce, existuje pouze, pokud je původní funkce prostá. Pokud prostá není, můžeme hledat inverní funkci pouze k restrikcím této funkce, které prosté jsou (stejně jako je například funkce arcsin definovaná jako inverze k restrikci funkce sin).

Nyní již přistoupíme k výkladu postupu nalezení inverzní funkce k dané elementární funkci. Pro přehlednost a názornost si postup hledání inverzní funkce ukážeme na konkrétních příkladech. Tyto příklady však nebudou nijak specifické, postup nalezní inverze, uvedený na těchto příkladech, lze proto použít univerzálně. Východiskem budou inverzní funkce k základním elementárním funkcím, se kterými se počítá na gymnáziích a středních školách (viz Tabulka 2.1)[viii] a následující věta.

[viii]Budeme se zabývat i cyklometrickými funkcemi, které lze považovat za rozšiřující učivo na středních školách a gymnáziích.

Věta 9 (Inverze superpozice). *[13] Nechť f_1 a f_2 jsou prosté funkce. Potom*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Důkaz. Chceme, aby platilo:

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) &= \mathrm{id}_{\mathcal{H}(f \circ g)}, \\ \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) \circ (f \circ g) &= \mathrm{id}_{\mathcal{D}(f \circ g)}.\end{aligned}$$

Obě části jednoduše dokážeme díky asociativitě skládání funkcí.

$$\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ \left(\left(f^{-1} \circ f\right) \circ g\right) = g^{-1} \circ (\mathrm{id} \circ g) = g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{D}(f \circ g)},$$

$$(f \circ g) \circ \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) = f \circ \left(\left(g \circ g^{-1}\right) \circ f^{-1}\right) = f \circ \left(\mathrm{id} \circ f^{-1}\right) = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}(f \circ g)}.$$

□

Tato věta nás již přivádí k zmiňovanému postupu, jelikož z ní dokážeme jednoduše odvodit $(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n)^{-1} = f_n^{-1} \circ f_{n-1}^{-1} \circ \ldots \circ f_1^{-1}$.[ix] Pokud lze funkci zapsat ve tvaru $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$, kde funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou z tabulky 2.1, poté nalezneme inverzní funkci snadno. Korektnost tohoto algoritmu přímo plyne z věty 9. Problém s nalezením inverzní funkce nastává v případě aritmetických operací. V případě součtu (či jiné aritmetické operace) dvou funkcí nedokážeme totiž obecně nalézt inverzní funkci k tomuto součtu, i když dokážeme nalézt inverzi k oběma sčítancům (jak ukazuje příklad „$x + \ln x$“). Proto ukážeme jen speciální případy, kdy úloha na nalezení inverze je řešitelná. Začneme také s řešením úloh bez aritmetických operací, a poté teprve přidáme příklady, kde se budou aritmetické operace vyskytovat.

Úmluva. Pro zápis funkce máme dvě možnosti a to zápis pomocí funkčního kalkulu a zápis pomocí funkčních hodnot. Funkční kalkulus poskytuje při řešení úloh lepší vhled do problematiky inverzních funkcí, nicméně pro studenta a čtenáře by se jednalo o nový způsob kalkulu, budeme příklady řešit pomocí zápisu s funkčními hodnotami a jen u některých příkladů si ukážeme zápis pomocí funkčního kalkulu. I v případě zápisu pomocí funkčních hodnot

[ix]Dokázali bychom indukcí podle n, kdy bychom položili $f = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$

využijeme funkčního kalkulu pro přehlednost při zápisu skládání obou stran rovnice s funkcí.

Při převedení algoritmu hledání inverzní funkce tak, jak vyplývá z věty 9, který jsme zapsali pomocí funkčního kalkulu na zápis pomocí funkčních hodnot, dostáváme úlohu vyjádřit x z rovnice $y = f(x)$. Při řešení úlohy však musíme dávat pozor a hlídat podmínky platnosti řešení úlohy. Ty budou dvojího typu:

1. Pro x. Zbavujeme-li se funkce, která není prostá. Tím určíme maximální intervaly prostoty původní funkce a tím také restrikce neprosté funkce, pro které můžeme určit inverzní funkci.

2. Pro y. Pokud aplikujeme funkci, která není definovaná na celé množině $\mathbb{R}$, musíme stanovit podmínky, za kterých má aplikace smysl. Tím také určíme obor hodnot původní funkce, respektive definiční obor inverzní funkce.

Příklad 3. Nalezněte inverzní funkci k $f : y = \ln x^3$.

Řešení. Nejdříve určíme definiční obor funkce, který bude zároveň oborem hodnot funkce inverzní: $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = (0; \infty)$. Nyní se budeme snažit z rovnice $y = \ln x^3$vyjádřit x. Dostaneme

$$\begin{aligned} y &= \ln x^3 \ / \exp \circ \\ \mathrm{e}^y &= x^3 \\ \sqrt[3]{\mathrm{e}^y} &= x. \end{aligned}$$

Těmito úpravami jsme získali původní funkci zapsanou v implicitním tvaru. Nyní však můžeme zaměnit x a y a dostaneme předpis inverzní funkce, tedy $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{e^x}$. Definiční obor funkce f^{-1}, který je zároveň oborem hodnot funkce f, je $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$. Pokud bychom chtěli zapsat řešení pomocí funkčního kalkulu, dostali bychom $f = \ln \circ \mathrm{id}^3$ a pro inverzní funkci

$$f^{-1} = (\mathrm{id}^3)^{-1} \circ \ln^{-1} = \mathrm{id}^{\frac{1}{3}} \circ \exp .$$

funkce	**inverzní funkce**
id	id
$\mathrm{id}^{2k} \restriction \langle 0; \infty), k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$
$\mathrm{id}^{2k} \restriction (-\infty; 0\rangle, k \in \mathbb{Z}$	$-\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$
$\mathrm{id}^{2k+1}, k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{id}^{\frac{1}{2k+1}}$
$\exp$	$\ln$
$\exp_a$	$\log_a$
$\ln$	$\exp$
$\log_a$	$\exp_a$
$\sin \restriction \langle 2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}\rangle, k \in \mathbb{Z}$	$\arcsin + 2k\pi$
$\sin \restriction \langle (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}\rangle, k \in \mathbb{Z}$	$(2k+1)\pi - \arcsin$
$\cos \restriction \langle 2k\pi; 2k\pi + \pi\rangle, k \in \mathbb{Z}$	$\arccos + 2k\pi$
$\cos \restriction \langle (2k+1)\pi; (2k+1)\pi + \pi\rangle, k \in \mathbb{Z}$	$(2k+1)\pi - \arccos$
$\mathrm{tg} \restriction (k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{arctg} + k\pi$
$\mathrm{cotg} \restriction (k\pi; k\pi + \pi), k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{arccotg} + k\pi$
$\arcsin$	$\sin \restriction \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$
$\arccos$	$\cos \restriction \langle 0; \pi\rangle$
arctg	$\mathrm{tg} \restriction (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
$\mathrm{arccotg}$	$\mathrm{cotg} \restriction (0; \pi)$
$\mathrm{K}_b \restriction \{k\}, k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{K}_k \restriction \{b\}$

Tabulka 2.1: Inverze základních elementárních funkcí

O něco složitější bude situace v případě, kdy zadaná funkce nebude prostá. Musíme potom nalézt restrikce této funkce, které prosté jsou, a určit inverze k těmto restrikcím.

Příklad 4. Nalezněte inverzi k funkci $f : y = \mathrm{e}^{x^2}$.

Řešení. Definiční obor fukce je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Budeme postupovat stejně jako v předešlém příkladu a dostaneme

$$
\begin{aligned}
y &= \mathrm{e}^{x^2} \\
\ln y &= x^2,\ y > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \geq 0: \qquad \ln y &= x^2 \ / \, \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \\
\sqrt{\ln y} &= x,\ \ln y \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \leq 0: \qquad \ln y &= x^2 \ / - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \\
-\sqrt{\ln y} &= x,\ \ln y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Důležité zde bylo uvědomit si, že inverní funkce k funkci „sudá mocnina“ neexistuje. Existuje však k restrikci na intervaly prostoty sunkce id^2 (maximální vzhledem k inkluzi jsou $(-\infty; 0\rangle$ a $\langle 0; \infty)$). Inverzními funkcemi k restrikcím funkce f jsou potom

$$
\begin{cases}
(f \restriction_{(-\infty;0\rangle})^{-1}(x) & = -\sqrt{\ln x}, \\
(f \restriction_{\langle 0;\infty)})^{-1}(x) & = \sqrt{\ln x}.
\end{cases}
$$

Podmínkami pro y jsme také určili definiční obory těchto inverzí. Ty jsou v tomto případě shodné: $\mathcal{D} = \langle 1; \infty)$. Určili jsme také obor hodnot původní funkce, který je sjednocením množin, na kterých jsou definovány tyto inverze a tedy $\mathcal{H}(f) = \langle 1; \infty)$.

Jak z tohoto příkladu vidíme, intervaly prostoty funkce nemusí být vždy disjunktní. Mohou mít společný krajní bod. Tato situace nastane právě tehdy, je-li funkce v tomto bodě spojitá. V těchto bodech potom můžeme uvažovat jako inverzní funkci inverzi k libovolné z těchto restrickcí, jelikož inverzní funkce k oběma restrikcím bude mít v těchto bodech stejnou hodnotu. Tato funkce nebyla prostá, řešení úlohy se nám tak ztížilo. Stále však stačilo funkci rozdělit na dvě restrikce a na nich určit inverzi. Složitější však bude situace, pokud nebude možné celou funkci rozdělit na konečný počet restrikcí tak, aby byla prostá. Takový problém nastává u goniometrických funkcí.

Příklad 5. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \sin x^2$.

Řešení. Budeme postupovat již známým způsobem a dostaneme

$$y = \sin x^2.$$

Nyní hledáme restrikce, které jsou prosté a ty jsou dvojího typu. Prvním typem restrikcí budou restrikce, které vzniknou podmínkou

$$x^2 \in \left\langle 2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}.$$

Pro takové restrikce složíme rovnici s funkcí danou předpisem $\arcsin x + 2k\pi$. Druhý typ restrikcí je dán podmínkou

$$x^2 \in \left\langle (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}.$$

Pro takové restrikce složíme rovnici s funkcí danou předpisem $(2k+1)\pi -$ arcsin. Řešíme nejdříve soustavu rovnic plynoucí z první podmínky a dostaneme

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Pokud je

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < 0, \text{ neboli } k < -\frac{1}{4},$$

soustava nemá řešení. Pokud platí

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} < 0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ neboli } k \in \left\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right) \text{ a tedy } k = 0^{[x]},$$

můžeme za k dosadit a dostáváme soustavu $-\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2}$. První nerovnost je splněna vždy, z druhé získáme interval

$$\left\langle -\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\rangle.$$

[x] Jelikož k je celé číslo.

Nakonec pokud

$$\left(2k\pi - \frac{\pi}{2} \geq 0\right), \text{ neboli } k \geq \frac{1}{4} \text{ a tedy } k \geq 1.$$

Obě nerovnice nyní můžeme odmocnit a řešením soustavy je

$$x \in \left\langle -\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}; -\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}}; \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1.$$

Systém intervalů prostoty funkce f, pro které můžeme funkci složit zleva s funkcí $\arcsin x + 2k\pi$ je tedy

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = &\left\{ \left\langle -\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right\rangle \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \left\langle -\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}; -\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \left\langle \sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}}; \sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1 \right\}.\end{aligned}$$

Druhý typ restrikcí získáme řešením soustavy nerovnic

$$(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq (2x+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Stejným postupem jako v minulé části úlohy dostaneme systém intervalů prostoty funkce f, pro které můžeme rovnici zleva složit s funkcí $(2k+1)\pi -$ arcsin.

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = &\left\{ \left\langle -\sqrt{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}}; -\sqrt{(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \left\langle \sqrt{(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}}; \sqrt{(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}} \right\rangle, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\}.\end{aligned}$$

Pro tyto typy můžeme dále úlohu řešit a dostaneme

$$\begin{aligned}x \in I \in \mathcal{M}: \quad y &= \sin x^2 \ /(\arcsin + 2k\pi)\circ \\ x^2 &= \arcsin y + 2k\pi, \ y \in \langle -1; 1 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \geq 0: \qquad \arcsin y + 2k\pi &= x^2 \ / \operatorname{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ \sqrt{\arcsin y + 2k\pi} &= x.\end{aligned}$$

$$x \leq 0: \qquad \arcsin y + 2k\pi = x^2 \ / - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ$$
$$-\sqrt{\arcsin y + 2k\pi} = x.$$

Podmínky v druhé části řešení vyplynuly z neprostoty funkce id^2, ke které inverze na celém definičním oboru neexistuje. Existují však intervaly, na kterých prostá je, a k restrikcím na tyto intervaly již inverzní funkce existuje. Pro druhý typ restrikcí dostaneme analogicky

$$x \in I \in \mathcal{N}: \quad y = \sin x^2 \ /((2k+1)\pi - \arcsin)\circ$$
$$x^2 = (2k+1)\pi - \arcsin y, \ \ y \in \langle -1; 1\rangle$$

$$x \geq 0: \qquad (2k+1)\pi - \arcsin y = x^2 \ / \, \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ$$
$$\sqrt{(2k+1)\pi - \arcsin y} = x.$$

$$x \leq 0: \qquad (2k+1)\pi - \arcsin y = x^2 \ / - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ$$
$$-\sqrt{(2k+1)\pi - \arcsin y} = x.$$

Získali jsme tedy inverze pro prosté restrikce funkce f (pro všechny funkce předpokládáme, že $k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{cases}
\left(f \restriction_{\langle -\sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}; -\sqrt{2k\pi-\frac{\pi}{2}}\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{\arcsin x + 2k\pi}, k \geq 1 \\
\left(f \restriction_{\langle -\sqrt{(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}}; -\sqrt{(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}}\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{(2k+1)\pi - \arcsin x}, k \geq 0 \\
\left(f \restriction_{\langle -\sqrt{\frac{\pi}{2}}; 0\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{\arcsin x} \\
\left(f \restriction_{\langle 0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\rangle}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{\arcsin x} \\
\left(f \restriction_{\langle \sqrt{2k\pi-\frac{\pi}{2}}; \sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\rangle}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{\arcsin x + 2k\pi}, k \geq 1 \\
\left(f \restriction_{\langle \sqrt{(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}}; \sqrt{(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}}\rangle}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{(2k+1)\pi - \arcsin x}, k \geq 0.
\end{cases}$$

2.3 Aritmetické operace a inverze

Úmluva. Značení konstantního zobrazení, respektive funkce, jsme zavedli jako K_b, kde konstanta b je funkční hodnota této funkce. Z praktických důvodů však budeme dále používat pro označení takové funkce pouze tuto konstantu.

Jak jsem již zmínil, největší problém s hledáním inverzní funkce nastává v případě, že předpis funkce obsahuje aritmetické operace. Postupovat budeme podle složitosti jednotlivých funkcí a opět si postup hledání inverze ukážeme na konkrétních příkladech. Jedním z případů, kdy inverze obecně existuje, jsou funkce dané aritmetickou operací mezi invertibilní funkcí a konstantou. Vyplývá to z toho, že aritmetické operace jsou k sobě po dvou inverzní (v tom smyslu, že $a + b = c \Leftrightarrow a = b - c$ a $ab = c \Leftrightarrow a = \frac{c}{b}, b \neq 0$.) Inverzní funkce k funkci $f : y = x + 3$ tak bude funkce $f^{-1} : y = x - 3$, inverzní funkce k funkci $g : y = 3x$ bude funkce $g^{-1} : y = \frac{x}{3}$. Na tomto základě potom můžeme hledat inverze i k funkcím daným aritmetickými operacemi mezi nekonstantními funkcemi.

2.3.1 Polynomické funkce

V případě polynomických funkcí uvažujeme funkce generované množinou $\langle \{K_b, \mathrm{id}\}, \{+, -, \cdot, \circ\} \rangle$[xi]. Budeme postupovat podle stupně této polynomické funkce. Začneme s lineární funkcí, tedy polynomickou funkcí prvního stupně (tedy nikoli funkcí konstantní).

Příklad 6. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = 4x - 7$.

Řešení. Pro definiční obor funkce f platí $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Jedná se o funkci rostoucí, tedy prostou, tudíž k ní inverzní funkce bude existovat. Vyjadřujeme, stejně jako v předchozích případech x z rovnice, a tedy

$$\begin{aligned} y &= 4x - 7 \\ y + 7 &= 4x \\ \frac{y+7}{4} &= x. \end{aligned}$$

Inverzní funkcí k fukci f je potom daná předpisem $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$. Pokud bychom chtěli řešení zapsat pomocí funkčního kalkulu můžeme zapsat funkci jako $f = (\mathrm{id} - 7) \circ (4 \cdot \mathrm{id})$. Inverzní funkci poté dostáváme podle věty 9: $f^{-1} = (4 \cdot \mathrm{id})^{-1} \circ (\mathrm{id} - 7)^{-1} = \frac{\mathrm{id}}{4} \circ (\mathrm{id} + 7) = \frac{\mathrm{id} + 7}{4}$.

[xi]Dokázáno v [10].

Obecně je potom inverzní funkce k lineární funkci dané předpisem $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ funkce daná předpisem $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$. U lineární funkce bylo tedy nalezení inverze jednoduché. Další polynomickou funkcí, ke které budeme hledat inverzní funkci, je kvadratická funkce, tedy polynomická funkce druhého stupně.

Příklad 7. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = x^2 - 4x + 1$.

Řešení. Na začátku určíme definiční obor $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Nyní narážíme na problém, jelikož funkce není prostá. Opět se budeme snažit z rovnice vyjádřit x, musíme však dávat pozor na intervaly prostoty funkce f. V tomto případě také rovnou nedokážeme x vyjádřit. Rovnici potřebujeme dostat do takového tvaru, abychom mohli aplikovat poznatky z tabulky 2.1. V našem případě se nabízí upravit pravou stranu rovnice na čtverec, a v takovém tvaru již dokážeme x vyjádřit. Dostaneme

$$\begin{aligned} y &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 1 \\ y + 3 &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \geq 2: \quad y + 3 &= (x-2)^2 \ / \, \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \\ x - 2 &= \sqrt{y+3}, \ y \geq -3 \\ x &= \sqrt{y+3} + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \leq 2: \quad y + 3 &= (x-2)^2 \ / - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \\ x - 2 &= -\sqrt{y+3}, \ y \geq -3 \\ x &= -\sqrt{y+3} + 2. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy inverzi ke dvěma restrikcím původní funkce

$$\begin{cases} \left(f \restriction_{(-\infty;2\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{x+3} + 2 \\ \left(f \restriction_{\langle 2;\infty)}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{x+3} + 2 \end{cases}$$

a jejich definiční obory, které jsou shodné pro obě funkce a to $\mathcal{D} = \langle -3; \infty)$. Tato množina je také oborem hodnot funkce f.

Obecně budeme tedy hledat inverzní funkci ke kvadratické funkci převedením kvadratické funkce dané předpisem $f(x) = ax^2+bx+c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ na čtverec, tedy na tvar $f(x) = a(x+p)^2+q,\ a, p, q \in \mathbb{R}, a \neq 0$[xii], převedením konstanty q na levou stranu rovnice, vydělením rovnice konstantou a, a poté odmocněním rovnice[xiii] s rozlišením případů $x + p \geq 0$ a $x + p \leq 0$, čímž určíme intervaly prostoty původní funkce. Inverzními funkcemi k restrikcím původní funkce jsou tedy

$$\begin{cases} \left(f \restriction_{(-\infty;-p\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{\frac{x-q}{a}} - p \\ \left(f \restriction_{\langle -p;\infty)}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{\frac{x-q}{a}} - p. \end{cases}$$

Další polynomické funkce, které jsou invertibilní, jsou kubické a kvartické rovnice, tedy polynomické rovnice třetího a čtvrtého stupně. Jelikož dokážeme nalézt kořeny těchto funkcí[xiv] a vyjádřit je v radikálech, dokážeme nalézt i jejich inverzní funkce, které budou elementární. Mame-li totiž například funkce g_1, g_2, g_3, které aplikovány na kubický polynom naleznou jeho kořeny, pak pro libovolný kubický polynom P jsou $g_1 \circ (P-y), g_2 \circ (P-y), g_3 \circ (P-y)$ jeho inverze na různých restrikcích. Zde však bude nalezení funkce výrazně obtížnější, proto si nebudeme ukazovat konkrétní příklad na hledání takové inverzní funkce. Ukážeme si zde pouze řešení speciálního případu kvartické funkce, tzv. bikvadratické funkce[xv].

Příklad 8. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = x^4 - x^2 - 1$.

Řešení. Jedná se o funkci bikvadratickou, což je v podstatě kvadratická funkce složena s vnitřní funkcí id^2. Definiční obor je proto opět roven množině všech reálných čísel. Tuto funkci můžeme zapsat jako $f = (\mathrm{id}^2 - \mathrm{id} - 1) \circ (\mathrm{id}^2)$. V zápisu pomocí funkční hodnoty se tento krok realizuje substitucí $z = x^2$. Potom funkci můžeme zapsat jako $f : y = z^2 - z - 1$, tedy jako kvadratickou

[xii]Pomocí funkčního kalkulu bychom tento tvar zapsali jako $f(x) = (\mathrm{id} + q) \circ (a\,\mathrm{id}^2) \circ (\mathrm{id} + p),\ a, p, q \in \mathbb{R}, a \neq 0$

[xiii]Aplikací funkcí $\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}$ a $-\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}$

[xiv]Pomocí tzv. Cardanových vzorců

[xv]Rovnice ve tvaru $ax^4 + bx^2 + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

funkci. Opět se však nejedná o prostou funkci, musíme tedy dávat pozor na intervaly prostoty této funkce. Upravením na čtverec dostaneme

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{4} + 1 &= x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \\ y + \frac{5}{4} &= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$|x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}: \quad \begin{aligned} y + \frac{5}{4} &= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ x^2 - \frac{1}{2} &= \sqrt{y + \frac{5}{4}},\ y \geq -\frac{5}{4} \\ x^2 &= \sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$x \geq 0: \quad \begin{aligned} x^2 &= \sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \quad \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ x &= \sqrt{\sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$x \leq 0: \quad \begin{aligned} x^2 &= \sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \quad \Big/ - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ x &= -\sqrt{\sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}: \quad \begin{aligned} y + \frac{5}{4} &= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \Big/ - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ x^2 - \frac{1}{2} &= -\sqrt{y + \frac{5}{4}},\ y \geq -\frac{5}{4} \\ x^2 &= -\sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$x \geq 0: \quad \begin{aligned} x^2 &= -\sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2} \quad \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ x &= \sqrt{-\sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{1}{2}},\ y \leq -1. \end{aligned}$$

$$x \leq 0: \quad x^2 = -\sqrt{y+\frac{5}{4}}+\frac{1}{2} \quad \Big/ -\mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ$$
$$x = -\sqrt{-\sqrt{y+\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}},\ y \leq -1.$$

Řešením jsme tedy určili čtyři intervaly, na kterých je funkce f prostá, a zároveň předpisy inverzních funkcí k restrikcím na tyto intervaly.

$$\begin{cases} \left(f \restriction_{(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{\sqrt{x+\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}} \\ \left(f \restriction_{\langle-\frac{\sqrt{2}}{2};0\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{-\sqrt{x+\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}} \\ \left(f \restriction_{\langle 0;\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{-\sqrt{x+\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}} \\ \left(f \restriction_{\langle\frac{\sqrt{2}}{2};\infty)}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{\sqrt{x+\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Určili jsme také obor hodnot funkce f. Ten je $\mathcal{H}(f) = \langle -\frac{5}{4};\infty)$. Pro definiční obory jednotlivých inverzí platí

$$\mathcal{D}\left(\left(f \restriction_{\langle-\frac{\sqrt{2}}{2};0\rangle}\right)^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(\left(f \restriction_{\langle 0;\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle}\right)^{-1}\right) = \left\langle -\frac{5}{4};-1\right\rangle$$

a

$$\mathcal{D}\left(\left(f \restriction_{(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle}\right)^{-1}\right) = \mathcal{D}\left(\left(f \restriction_{\langle\frac{\sqrt{2}}{2};\infty)}\right)^{-1}\right) = \left\langle -\frac{5}{4};\infty\right).$$

V tomto příkladě jsme odmocňovali dvakrát, nicméně postup byl analogický s příkladem 7 s tím, že funkce se nám místo dvou restrikcí rozpadla na čtyři. Na závěr této části je třeba říci, že podle Abel-Ruffiniho věty, jak jsme již diskutovali v minulé kapitole, pro polynomy stupně vyššího než čtvrtého nejde obecně vyjádřit kořeny v radikálech. Jelikož však není známý postup, jak vyjádřit kořeny pomocí elementárních funkcí, označíme tyto funkce (kromě níže uvedených speciálních případů) za neinvertibilní. Existují však některé speciální případy, kdy v rámci elementárních funkcí dokážeme nalézt jejich inverzi. Konkrétně dokážeme-li funkci f rozložit na tvar $f = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$, kde funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou polynomické funkce nejvýše čtvrtého stupně, nebo funkce id^n, $n \in \mathbb{N}$. Zde je důležité zmínit, že pro samotnou funkci id^n, nebo její restrikce, dokážeme inverzní funkci nalézt vždy a to přímo podle tabulky 2.1. Příkladem takové funkce je $f = \mathrm{id}^{16} - 7\,\mathrm{id}^8 + 5$, jelikož ji dokážeme zapsat jako $f = (\mathrm{id}^2 - 7\,\mathrm{id} + 5) \circ \mathrm{id}^8$. Invertibilní bude však také například funkce ($f = (6\,\mathrm{id}^2 - 2\,\mathrm{id} + 7)^3 - 5(6\,\mathrm{id}^2 - 2\,\mathrm{id} + 7)^2 + 2(6\,\mathrm{id}^2 - 2\,\mathrm{id} + 7) + 2$ jelikož funkci můžeme rozložit jako $f = (\mathrm{id}^3 - 5\,\mathrm{id}^2 + 2\,\mathrm{id} + 2) \circ (6\,\mathrm{id}^2 - 2\,\mathrm{id} + 7)$. Nicméně zde nastává jiný problém. Funkce je sice invertibilní, nicméně zadáme-li funkci v základním tvaru polynomu, tedy

$$f = 108\,\mathrm{id}^6 - 108\,\mathrm{id}^5 + 324\,\mathrm{id}^4 - 196\,\mathrm{id}^3 + 269\,\mathrm{id}^2 - 79\,\mathrm{id} + 57,$$

řešení úlohy na nalezení inverzní funkce bude velmi obtížné. Jedná se o polynomickou funkci šestého stupně, která obecně invertibilní není, a je třeba nalézt výše uvedené rozložení funkce, což je velmi obtížný problém.

2.3.2 Racionální funkce

U racionálních funkcí bude nalezení inverze obecně o něco složitější než u polynomických. Opět budeme postup ilustrovat na konkrétních příkladech. Začneme s lineární lomenou funkcí a budeme postupovat ke složitějším.

Příklad 9. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \dfrac{2x+3}{x-7}$.

Řešení. Jelikož se jedná o funkci prostou, existuje k ní funkce inverzní. Pro definiční obor platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{7\}$. Budeme postupovat stejně jako v předchozích případech, tedy vyjádříme x z rovnice $y = \frac{2x+3}{x-7}$. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+3}{x-7} \\ y(x-7) &= 2x+3 \\ yx - 7y &= 2x+3 \\ yx - 2x &= 7y+3 \\ x(y-2) &= 7y+3 \\ x &= \frac{7y+3}{y-2}, y \neq 2. \end{aligned}$$

Předpisem inverzní funkce je tedy $f^{-1}(x) = \frac{7x+3}{x-2}$. Získali jsme opět i obor hodnot funkce f, který je $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathcal{D}(f^{-1})$. Pokud bychom chtěli řešení zapsat pomocí funkčního kalkulu, dostáváme

$$f = \frac{2\,\mathrm{id}+3}{\mathrm{id}-7} = \frac{17}{\mathrm{id}-7} + 2 = 2 + 17\frac{1}{\mathrm{id}-7} =$$
$$= (\mathrm{id}+2) \circ (17\,\mathrm{id}) \circ \left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \circ (\mathrm{id}-7).$$

Nyní již dokážeme nalézt funkci f^{-1}.

$$f^{-1} = (\mathrm{id}+7) \circ \left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \circ \left(\frac{\mathrm{id}}{17}\right) \circ (\mathrm{id}-2) = \frac{17}{\mathrm{id}-2} + 7 = \frac{7\,\mathrm{id}+3}{\mathrm{id}-2}.$$

Ukázali jsme si, jak postupovat při hledání inverze k lineární lomené funkci. Postoupíme nyní ke složitější funkci, a tou je kvadratická lomená funkce.

Příklad 10. Nalezněte inverní funkci k funkci $f : y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Řešení. Definičním oborem funkce je celá množina reálných čísel. Opět se však jedná o funkci, která není prostá, budeme proto hledat inverzi k restrikcím, na kterých prostá je. Budeme se snažit vyjádřit x z rovnice $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

$$\begin{array}{rcll} y &=& \frac{2x}{1+x^2} & / \cdot (1+x^2) \\ y + yx^2 &=& 2x & / - 2x \\ yx^2 - 2x + y &=& 0. & \end{array}$$

Na levé straně rovnice máme v tomto tvaru funkci dvou proměnných $f(x, y)$. My s touto funkcí však budeme pracovat jako s funkcí jedné proměnné x s parametrem y. V takovém případě můžeme postupovat podobně jako u příkladů 6 a 7, tedy doplněním levé strany na čtverec. Nejdříve však celou rovnici vydělíme $-y$, abychom získali u kvadratického členu koeficient 1. Zde však musíme rozlišit dva případy. Pro $y = 0$ rovnici dělit nemůžeme a tento případ musíme vyjmout. Pokud $y \neq 0$ dostáváme

$$\begin{array}{rcl} x^2 - \frac{2}{y}x &=& -1 \\ x^2 - \frac{2}{y}x + \frac{1}{y^2} &=& -1 + \frac{1}{y^2} \\ \left(x - \frac{1}{y}\right)^2 &=& \frac{1-y^2}{y^2}. \end{array}$$

Než celou rovnici odmocníme, rozlišíme případy, kdy $x - \frac{1}{y} \geq 0$ a kdy $x - \frac{1}{y} \leq 0$. Vzhledem k tomu, že tuto rovnici řešíme vzhledem k x, musíme se vrátit k předpisu funkce $y = \frac{2x}{1+x^2}$ a dostaneme nerovnice $x - \frac{1}{\frac{2x}{1+x^2}} \geq 0$ a $x - \frac{1}{\frac{2x}{1+x^2}} \leq 0$. Pro první nerovnici dostáváme řešení $x \in \langle -1; 0) \cup \langle 1; \infty)$, pro druhou nerovnici potom $(-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle$. Odmocněním dostáváme také podmínku pro y: $\frac{1-y^2}{y^2} \geq 0$, neboli $y \in \langle -1; 1\rangle$. Jako předpisy inverzní funkce potom dostaneme

$$\left(f_{\restriction \langle -1;0) \cup \langle 1;\infty)}\right)^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}} + \frac{1}{x} \quad \text{a}$$

$$\left(f_{\restriction (-\infty;-1\rangle \cup (0;1\rangle}\right)^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1-x^2}{x}} + \frac{1}{x}.$$

V tuto chvíli můžeme však k tomuto řešení ještě přidat inverzi pro jednobodovou restrikci funkce v bodě 0. Jelikož $[0; 0] \in f$ tak platí také $[0; 0] \in f^{-1}$. Nyní můžeme zapsat celé řešení příkladu pro jednotlivé intervaly prostoty původní funkce.

$$\begin{cases} \left(f \restriction_{(-\infty;1\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{\frac{1-x^2}{x}} + \frac{1}{x} \\ \left(f \restriction_{\langle -1;1\rangle}\right)^{-1}(x) & = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-x^2}{x}} + \frac{1}{x} & \text{pro } x \in \langle -1; 0) \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ -\sqrt{\frac{1-x^2}{x}} + \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0; 1\rangle \end{cases} \\ \left(f \restriction_{\langle 1;\infty)}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}} + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Zjistili jsme také obor hodnot původní funkce a to $\mathcal{H}(f) = \langle -1; 1\rangle$

Zde už je vidět vzrůstající obtížnost řešení úlohy na nalezení inverzní funkce, kdy musíme pracovat s funkcí s parametrem. Dalšími racionálními funkcemi, které jsou invertibilní, jsou takové funkce, kde polynomy v čitateli i jmenovateli budou stupně nejvýše čtyři. Vysvětlení je stejné jako u inverzní funkce k funkci polynomické, jelikož, jak jsme si již ukázali výše, dokážeme rovnici $y = \frac{a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5}{b_1x^4+b_2x^3+b_3x^2+b_4x+b_5}$ převést na polynomickou rovnici čtvrtého stupně s parametrem y. Racionálních funkce, kde v čitateli nebo jmenovateli bude polynom vyššího stupně, nejsou obecně invertibilní. Budou však existovat speciální případy funkcí, které invertibilní budou. Opět můžeme využít analogie s polynomickými funkcemi. Pokud funkci dokážeme rozložit na tvar $f = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$, kde funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou racionální funkce s polynomy stupně nejvýše čtyři v čitateli i jmenovateli, dokážeme k takové funkci najít funkci inverzní.

2.3.3 Odmocniny

Na začátek této časti je třeba zdůraznit, že zde budu uvádět postupy pouze pro některé speciální případy funkcí s neznámou pod odmocninou a univerzální návod k hledání inverní funkce v tomto případě chybí. Nicméně pro tyto speciální případy je postup univerzální. Je také třeba uvést, že pro funkce, které dokážeme přímo převést na složení konečného počtu funkcí, z tabulky 2.1 a algebraických funkcí, ke kterým dokážeme inverzi nalézt, není problém nalézt inverzní funkci podle věty 9 a tabulky 2.1. Problém nastává v případě aritmetických operací, a proto si ukážeme pouze speciální případy, pro které dokážeme inverzní funkci nalézt. Důležité je také uvědomit si, že inverzní funkce k $\mathrm{id}^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$ není id^{2k}, ale $\mathrm{id}^{2k} \restriction \langle 0; \infty)$. Nejdříve si ukážeme jeden jednoduchý příklad.

Příklad 11. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$.

Řešení. Jedná se o výše zmíněný příklad, kdy funkci dokážeme zapsat ve tvaru složení funkcí, jejichž inverzi již dokážeme nalézt, konkrétně jako složení odmocninné funkce funkce $\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}$ a kvadratické funkce. Definiční obor funkce je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = (-\infty; -5\rangle \cup \langle 1; \infty)$. Řešíme umocněním rovnice $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ a dostáváme postupně

$$y^2 = x^2 + 4x - 5 \quad y \geq 0$$
$$y^2 + 9 = (x + 2)^2$$

$$\begin{aligned} x \geq -2 \quad : (x+2)^2 &= y^2 + 9 \ / \ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \\ x + 2 &= \sqrt{y^2 + 9} \\ x &= \sqrt{y^2 + 9} - 2. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \leq -2 \quad : (x+2)^2 &= y^2 + 9 \ / - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \\
x + 2 &= -\sqrt{y^2+9} \\
x &= -\sqrt{y^2+9} - 2.
\end{aligned}
$$

Řešení příkladu se zohledněním podmínek pro y[xvi] potom můžeme zapsat jako

$$
\begin{cases}
\left(f \restriction_{(-\infty;-2\rangle}\right)^{-1}(x) & = (-\sqrt{x^2+9}-2)), x \in \langle 0;\infty) \\
\left(f \restriction_{\langle -2;\infty)}\right)^{-1}(x) & = (\sqrt{x^2+9}-2), x \in \langle 0;\infty).
\end{cases}
$$

Zde je nutné poznamenat, že postup řešení by se nezměnil pro jakoukolli odmocninu jako vnější funkci, jelikož by se vždy jednalo o složení vnitřní kvadratické funkce s vnější odmocninnou, k níž inverzní funkci dokážeme nalézt. V tomto případě tedy záleží na řešitelnosti úlohy na nalezení inverzní funkce k vnitřní funkci složené s vnější odmocninnou funkcí.

Složitějším bude případ, kdy funkce bude ve tvaru $f : y = \sqrt{g} + \sqrt{h}$, g, h jsou algebraické funkce.

Příklad 12. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x}$.

Řešení. Nejdříve určíme definiční obor funkce f, $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \langle 0;\infty)$. Nyní se budeme snažit eliminovat odmocniny, abychom mohli vyjádřit z rovnice $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x}$ neznámou x. Umocníme tedy celou rovnici a dostáváme

$$y^2 = 3x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + x}.$$

Jak je vidět, odmocnin z této rovnice jsme se ještě nezbavili, budeme tedy muset rovnici umocnit ještě jednou s tím, že vše, kromě této odmocniny,

[xvi] Těmito podmínkami jsme zapsali restrikce funkce id^2, které jsou inverze k $\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}$

přesuneme na druhou stranu rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned}
y^2 - 3x - 1 &= -2\sqrt{2x^2 + x} \\
[y^2 - (3x + 1)]^2 &= (-2)^2\sqrt{2x^2 + x}^2 \\
y^4 - 2y^2(3x + 1) + (3x + 1)^2 &= 4(2x^2 + x) \\
x^2 + 2x - 6y^2x + y^4 - 2y^2 + 1 &= 0 \\
x^2 + x(2 - 6y^2) + (1 - 3y^2)^2 &= -y^4 + 2y^2 - 1 + (1 - 3y^2)^2 \\
\left(x + 1 - 3y^2\right)^2 &= 8y^4 - 4y^2.
\end{aligned}$$

Převedli jsme tedy úlohu na případ, který jsme řešili při hledání inverze k racionální funkci. Musíme nyní rozlišit, kdy $x+1-3y^2 \geq 0$ a $x+1-3y^2 \leq 0$. Opět nerovnice řešíme vzhledem k x, za y proto dosadíme $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x}$ a dostaneme dostáváme nerovnice $x + 1 - 3(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x})^2 \geq 0$ a $x + 1 - 3(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x})^2 \leq 0$. Pro obě nerovnice platí podmínka $x \geq 0$[xvii]. Řešíme první z nerovnic a dostáváme

$$\begin{aligned}
x + 1 - 3(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x})^2 &\geq 0 \\
-8x - 2 + 6\sqrt{2x^2 + x} &\geq 0 \\
4x + 1 &\leq 3\sqrt{2x^2 + x}.
\end{aligned}$$

Se zohledněním podmínek jsou obě strany nerovnice vždy nezáporné, nerovnici proto můžeme umocnit a dostaneme

$$\begin{aligned}
2x^2 + x - 1 &\leq 0 \\
x &\in \left\langle -1; \frac{1}{2} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Se zohledněním všech podmínek dostáváme $x \in \langle 0; \frac{1}{2}\rangle$. Druhá nerovnice má řešení řešení $x \in \langle \frac{1}{2}; \infty)$. Nalezli jsme tedy restrikce původní funkce, ke kterým můžeme určit inverzní funkci a dostáváme řešení

$$\begin{cases}
\left(f\restriction_{\langle 0; \frac{1}{2}\rangle}\right)^{-1}(x) & = 3x^2 - 1 + 2\sqrt{2x^4 - x^2} \\
\left(f\restriction_{\langle \frac{1}{2}; \infty)}\right)^{-1}(x) & = 3x^2 - 1 - 2\sqrt{2x^4 - x^2}.
\end{cases}$$

[xvii]Plyne z definičního oboru funkce.

Jak jsme viděli při tomto řešení, nalézt inverzní funkci nebylo jednoduché. Ještě složitějším problémem bude případ, kdy v původní funkci bude součet či rozdíl tří odmocninných funkcí, nebo kombinace druhé a třetí odmocniny.

Příklad 13. Určete inverní funkci k funkci $f : y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$.

Řešení. Definiční obor funkce je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \langle 1; \infty)$. V tomto případě převedeme jednu z odmocnin na druhou stranu rovnice $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ a budeme rovnici postupně umocňovat tak, abychom se zbavili odmocnin. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
y - \sqrt{x} &= \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \\
y^2 + x - 2y\sqrt{x} &= x + 2\sqrt{x^2-1} \\
y^2 - x &= 2y\sqrt{x} + 2\sqrt{x^2-1} \\
y^4 - 2y^2x + x^2 &= 4y^2x + 4x^2 - 4 + 8y\sqrt{x^3-x} \\
y^4 - 6y^2x - 3x^2 + 4 &= 8y\sqrt{x^3-x}.
\end{aligned}
$$

Tuto rovnici ještě jednou umocníme a dostaneme

$$
\begin{multlined}
9x^4 + 36x^3y^2 + 30x^2y^4 - 24x^2 - 12xy^6 - 48xy^2 + \\
+ y^8 + 8y^4 + 16 = 64x^3y^2 - 64xy^2.
\end{multlined}
$$

Řešení úlohy je tedy ekvivalentní k nalezení inverze k racionální funkci se polynomem čtvrtého stupně, což je řešitelný případ, nicméně svou obtížností přesahuje rámec této práce.

Poslední příklad, který si zde ukážeme je takový, kdy funkce bude součtem druhé odmocniny a třetí odmocniny

Příklad 14. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

Řešení. V tomto případě bude nejjednoduším způsobem pro řešení úlohy zavedení substituce takové, abychom se zbavili odmocnin. Můžeme zavést substituci $t = \sqrt[6]{x}$ a po dosazení dostaneme $y = t^3 + t^2$. Řešení této úlohy opět přesahuje rámec této práce, jelikož bychom museli nalézt inverzi k polynomické funkci třetí stupně, a tedy poučít Cardanovy vzorce.

2.4 Příklady

V této části si ukážeme několik příkladů na hledání inverzní funkce, kde využijeme dřívějších poznatků. Budeme postupovat od nejjednodušších ke složitějším. Nejjednoduššími budou takové příklady, kdy funkce, ke které hledáme inverzi, je prostá a k hledání inverzní funkce můžeme přímo využít postup uvedený na začátku kapitoly.

Příklad 15. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \mathrm{e}^{x-1} + 3$.

Řešení. Definiční obor funkce je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Budeme tedy z rovnice $y = \mathrm{e}^{x-1} + 3$ vyjadřovat x a dostaneme

$$
\begin{aligned}
y - 3 &= \mathrm{e}^{x-1} \ / \ln \circ \\
\ln(y-3) &= x - 1, \ y > 3 \\
\ln(y-3) + 1 &= x.
\end{aligned}
$$

Předpis inverzní funkce je potom $f^{-1}(x) = \ln(x-3)+1$. Zjistili jsme také definiční obor inverzní funkce, respektive obor hodnot původní funkce $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = (3;\infty)$. Pomocí funkčního kalkulu bychom mohli funkci zapsat jako $f = (\mathrm{id}+3) \circ (\exp) \circ (\mathrm{id}-1)$ a inverzní funkcí je

$$f-1 = (\mathrm{id}-1)^{-1} \circ (\exp)^{-1} \circ (\mathrm{id}+3)^{-1} = (\mathrm{id}+1) \circ (\ln) \circ (\mathrm{id}-3) = \ln(\mathrm{id}-3)+1.$$

Dalšími funkcemi, které jsou prosté na celém definičním oboru, a tudíž k nim existuje inverzní funkce, jsou funkce logaritmické a cyklometrické[xviii][xix].

Příklad 16. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \arcsin\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$.

Řešení. Ač příklad vypadá na první pohled složitě, nebude tak složitý, jak se zdá. Jedná se totiž o funkci prostou, jelikož lineární lomená funkce, funkce

[xviii] Jejich prostota vyplývá z jejich definice jako inverzí.

[xix] Prosté jsou také některé algebraické funkce, ty jsme však již diskutovali

druhá odmocnina i funkce arcsin jsou prosté, proto při hledání inverze nemusíme hledat intervaly prostoty. Z rovnice $y = \arcsin\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ se pokusíme vyjádřit x a dostáváme

$$\begin{aligned}
y &= \arcsin\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \;\Big/ \sin\restriction_{\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\rangle} \\
\sin y &= \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}^{[\mathrm{xx}]} \;\Big/ \mathrm{id}^2\restriction_{\langle 0;\infty)} && y \in \left\langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle \\
\sin^2 y &= \frac{x+2}{x+1} && \sin y \in \langle 0;\infty) \\
(x+1)\sin^2 y &= x+2 \\
x\sin^2 y + \sin^2 y &= x+2 \\
x(\sin^2 y - 1) &= 2 - \sin^2 y \\
x &= \frac{2-\sin^2 y}{\sin^2 y - 1} && \sin^2 y - 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Dořešíme ještě podmínky $\sin y \in \langle 0;\infty)$ a $\sin^2 y - 1 \neq 0$ a dostáváme $y \in \langle 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle, k \in \mathbb{Z}$ a $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Předpis inverzní funkce se zohledněním podmínek je potom

$$f^{-1}(x) = \frac{2-\sin^2 x}{\sin^2 x - 1},\; x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) .$$

Složitější budou takové příklady, kdy původní funkce prostá není. Inverzní funkce k ní tedy neexistuje a musíme hledat restrikce této funkce, na kterých prostá je a inverzi na těchto restrikcích. Mezi základní elementární funkce, které nejsou prosté patří funkce $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{cotg}$. Postup při hledání inverze k takovému typu funkce jsme si již ukázali na příkladu 4. Další funkce, které prosté nejsou, jsou některé algebraické funkce, u kterých jsme si postup nalezení inverze také ukázali. Zbývá tedy ukázat si postup hledání inverze u složení základních elementárních funkcí a funkce algebraické takových, že alespoň jedna z těchto funkcí není prostá.

Příklad 17. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \ln(x^2 + 2x - 5)$.

Řešení. Definiční obor funkce je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(f^{-1}) = (-\infty; -\sqrt{6} - 1) \cup (\sqrt{6} - 1; \infty)$. Při řešení této úlohy můžeme využít poznatků z předešlých částí práce, především potom z části, kde jsme hledali inverzi k polynomické funkci. Vyjadřujeme x z rovnice $y = f(x)$ a dostávámme

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(x^2 + 2x - 5\right) \ \ /\exp\circ \\ e^y &= x^2 + 2x - 5 \\ e^y + 6 &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

$$x \leq -1: \qquad e^y + 6 = (x+1)^2 \ \Big/ -\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}\circ$$
$$-\sqrt{e^y + 6} - 1 = x,\ e^y + 6 \geq 0.$$

$$x \geq -1: \qquad e^y + 6 = (x+1)^2 \ \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}}\circ$$
$$\sqrt{e^y + 6} - 1 = x\, e^y + 6 \geq 0.$$

Podmínky které vznikly během řešení jsou splněny vždy. Definiční obor inverzí je tedy $\mathbb{R}$, což je také obor hodnot funkce f. Předpisy inverzí k jednotlivým restrikcím jsou potom

$$\begin{cases} \left(f \restriction_{(-\infty;-1\rangle}\right)^{-1}(x) & = -\sqrt{e^x + 6} - 1 \\ \left(f \restriction_{\langle -1;\infty)}\right)^{-1}(x) & = \sqrt{e^x + 6} - 1. \end{cases}$$

Řešení tedy bylo analogické s hledáním inverze ke kvadratické funkci. Funkčním kalkulem také můžeme funkci zapsat

$$f = \ln\circ(\mathrm{id}^2 + 2\,\mathrm{id} - 5),$$

a poté podle věty 9 dostáváme

$$f^{-1} = (\mathrm{id}^2 + 2\,\mathrm{id} - 5)^{-1} \circ \ln^{-1},$$

z čehož je jasně vidět, že můžeme řešit zvlášť inverzi k vnitřní, tedy kvadratické funkci, a vnější logaritmické.

Posledním příkladem, jehož řešení si popíšeme, je příklad s vnější neprostou elementární funkcí a vnitřní algebraickou.

Příklad 18. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \operatorname{tg} \frac{1}{x+2}$.

Řešení. Funkci tg musíme rozdělit na nekonečně mnoho restrikcí tak, aby takové restrikce byly prosté. Situace je však o něco jednodušší, než u funkcí sin a cos, jelikož restrikce jsou jednoho typu. Nyní se pokusíme určit intervaly prostoty této funkce a tím také určíme její definiční obor. Budeme řešit soustavu nerovnic

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{1}{x+2} < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Při řešení těchto nerovnic musíme rozlišit případ $x < -2$ a $x > -2$. Nejdříve budeme řešit soustavu pro případ $x < -2$. Aby měla rovnice řešení musí platit

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < 0, \text{ neboli } k < \frac{1}{2}.$$

Pro první nerovnici potom dostáváme řešení

$$x < \frac{1}{k\pi - \frac{\pi}{2}} - 2.$$

Pro druhou nerovnici rozlišíme případy

$$k\pi + \frac{\pi}{2} > 0 \text{ a tedy } k > -\frac{1}{2} \text{ a } k\pi + \frac{\pi}{2} < 0 \text{ a tedy } k < -\frac{1}{2}.$$

V prvním případě k nabývá jediné hodnoty 0 a řešení soustavy je

$$x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\pi} - 2\right).$$

V druhém případě ke $k < -\frac{1}{2}$ a dostáváme řešení

$$x \in \left(\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}; \frac{1}{k\pi - \frac{\pi}{2}}\right), k \in \mathbb{Z}, k \leq -1.$$

Pro případ $x > -2$ dostáváme stejným postupem

$$x \in \left(\frac{2}{\pi} - 2; \infty\right)$$

a stejně jako v prvním případě

$$x \in \left(\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}; \frac{1}{k\pi - \frac{\pi}{2}}\right), k \in \mathbb{Z}, k \geq 1.$$

Zapišeme definiční obor jako sjednocení intervalů prostoty:

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})} \left(\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} - 2; \frac{1}{k\pi - \frac{\pi}{2}} - 2 \right) \cup$$
$$\cup \left(-\infty; -\frac{2}{\pi} - 2 \right) \cup \left(\frac{2}{\pi} - 2; \infty \right).$$

Na těchto intervalech potom můžeme rovnici $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x+2}$ složit s funkcí $\operatorname{arctg} + k\pi$ a dostaneme

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} \frac{1}{x+2} \; / (\operatorname{arctg} + k\pi) \circ \\ \operatorname{arctg} y + k\pi &= \frac{1}{x+2} \\ x &= \frac{1}{\operatorname{arctg} y + k\pi} - 2. \end{aligned}$$

Předpisy inverzních funkce pro jednotlivé intervaly prostoty jsou potom

$$\frac{1}{\operatorname{arctg} x + k\pi} - 2, k \in \mathbb{Z}.$$

2.5 Užití inverzních funkcí

Využití inverzních funkcí v matematice najdeme na středoškolské úrovni především v řešení rovnic a nerovnic. Pokud řešíme rovnici, dokážeme takovou rovnici ekvivalentními úpravami převést do tvaru „neznámé vlevo, známé vpravo“, což můžeme zapsat

$$f(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

Řešíme-li rovnici, snažíme se vyjádřit z této rovnice x. Toho docílíme složením obou stran rovnice s funkcí $f^{-1}(x)$[xxi] a dostaneme

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \circ f(x) &= f^{-1}(c) \\ x &= f^{-1}(c). \end{aligned}$$

Řešíme-li tedy například rovnici $3x = 5$, hledáme funkční hodnotu funkce $f^{-1} : y = \frac{x}{3}$, inverzní k funkci $f : y = 3x$ a dostáváme řešení rovnice $x = \frac{5}{3}$. Takový postup si můžeme ukázat i na složitějším příkladu.

Příklad 19. Nalezněte řešení rovnice $e^{\frac{2}{x-1}} = 2$.

Řešení. Řešením rovnice je v našem případě $f^{-1}(2)$, kdy $f : y = e^{\frac{2}{x-1}}$. Pokusíme se tedy z rovnice $y = e^{\frac{2}{x-1}}$ vyjádřit x[xxii]. Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{2}{x-1}} && / \ln \circ \\ \ln y &= \frac{2}{x-1} && / \cdot (x-1) \\ x \ln y - \ln y &= 2 && / + \ln y \,/ \div \ln y \\ x &= \frac{2}{\ln y} + 1. \end{aligned}.$$

Předpis inverzní funkce potom můžeme zapsat $f^{-1} : y = \frac{2}{\ln x} + 1$ a $f^{-1}(2) = \frac{2}{\ln 2} + 1$, což je řešením naší rovnice.

Při hledání funkce f^{-1} je na první pohled vidět analogie se řešením rovnice, tak jak ho známe ze střední školy, kdy nehledáme inverzní funkci, ale

[xxi]Vycházíme z věty 2

[xxii]Podle tabulky 2.1 skládáme obě strany rovnice zleva s funkcí ln jako inverzní funkcí k funkci exp.

přímo funkční hodnotu inverzní funkce v požadovaném bodě (v našem případě v bodě 2).

Důležité je však ukázat, že i když nedokážeme rovnici vždy převést na výše zmíněný tvar, můžeme i takové rovnice řešit za využití inverzní funkce. Jedná se především o exponenciální rovnice.

Příklad 20. Nalezněte řešení rovnice $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x-1} = 0$.

Řešení. Tuto rovnici můžeme zapsat také jako $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x-1}$ a v tomto tvaru rovnici řešíme složením zleva s funkcí ln a dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{2x-1} \quad / \ln \circ \\ x &= 2x - 1 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

U nerovnic bude situace podobná, nicméně je zde navíc důležité, zda inverzní funkce, se kterou skládáme funkci původní, bude rostoucí nebo klesající. Označíme-li strany strany rovnice písmeny L a P, bude platit

pro rostoucí funkci U: $L < P \Rightarrow U(L) < U(P)$,

pro klesající funkci U: $L < P \Rightarrow U(L) > U(P)$[xxiii].

Platnost tohoto tvrzení vyplývá přímo z definice rostoucí, respektive klesající funkce. Toto tvrzení potom můžeme využít při řešení nerovnic.

Příklad 21. Nalezněte řešení nerovnic

a) $3x > 5$

b) $-3x > 5$.

[xxiii]Funkci jsme označili písmenem U, jelikož se jedná o funkci, kterou upravujeme nerovnice

Řešení. V příkladě a) obě strany nerovnice složíme zleva s funkcí danou předpisem $U(x) = \frac{x}{3}$, která je rostoucí. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} 3x &> 5 \quad / U \circ \\ x &> \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

V příkladě b) bude však situace odlišná. Obě strany rovnice budeme skládat s funkcí danou předpisem $U(x) = -\frac{x}{3}$, která je klesající a dostaneme

$$\begin{aligned} -3x &> 5 \quad / U \circ \\ x &< -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Tento příklad nám ukazuje zobecnění pravidla ze základní a střední školy, kdy se při řešení používá pravidlo, které říká, že při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem otočíme znaménko nerovnosti. Násobení čí dělení nerovnice záporným číslem je přitom vnější složení obou stran nerovnice s lineární klesající funkcí. Znaménko nerovnosti se však změní vždy, když obě strany nerovnice složíme s libovolnou klesající funkcí[xxiv].

[xxiv] Například logaritmus se základem z intervalu $(0; 1)$.

Kapitola 3

Návrhy úloh

Mnoho typových úloh jsme si ukázali již v předchozích kapitolách. Nicméně zde si popíšeme další možnosti návrhu úloh na hledání definičního oboru a nám již známých úloh při tomto procesu využijeme. Při návrhu úloh je důležité uvědomit si jeden důležitý fakt. Navrhneme-li funkci f a nalezneme-li k ní inverzní funkci f^{-1}, získali jsme minimálně dvě možná zadání úlohy. Jako zadání totiž můžeme použít funkci f, ale i funkci f^{-1}. Pokud je funkce f neprostá, získáme možných zadání ještě více. Získáme několik úloh podobné obtížnosti, kdy výsledné předpisy hledané funkce jsou u všech příkladů stejné, liší se však definiční obory a obory hodnot těchto funkcí.

3.1 Prosté funkce

Nejjednodušími úlohami budou takové, kdy se bude jednat o složení prostých funkcí z tabulky 2.1. Poté můžeme přímo pomocí věty 9 nalézt inverzi zadané funkce. S jednou takovou funkcí jsme se již setkali, jednalo se o funkci z příkladu 3. Důležité však je, že i takové příklady mají jistá úskalí. Pokud při vyjadřování x z rovnice $y = f(x)$ skládáme rovnici s funkcí, která není definovaná pro všechna reálná čísla, vznikají nám podmínky a hledaná inverzní funkce nemusí být definovaná pro všechna reálná čísla. Nejdříve si uvedeme několik příkladů bez řešení, a poté jeden složitější příklad s řešením.

- $f_1 : y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
- $f_2 : y = 2^{\operatorname{arctg} x}$
- $f_3 : y = \ln \sqrt{x}$
- $f_4 : y = \sqrt[3]{\ln x}$
- $f_5 : y = a^{\sqrt[5]{\operatorname{arccotg} x}}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

Příklad 22. Nalezněte inverzní funkci k funkci

$$f : y = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\mathrm{e}^{\sqrt{3^x}}}.$$

Řešení. Jediné, co je třeba uvědomit si při řešení této úlohy je fakt, že inverzní funkce k funkci arctg není celá funkce tg, ale funkce $\operatorname{tg} \restriction_{\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle}$, inverzní funkce k $\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}$ je $\mathrm{id}^2 \restriction_{\langle 0;\infty)}$, a hlídat podmínky které vzniknou při řešení. Budeme tedy vyjadřovat x z rovnice $y = f(x)$ a postupně dostneme

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\mathrm{e}^{\sqrt{3^x}}} \Big/ \operatorname{tg} \restriction_{(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})} \circ & \\
\operatorname{tg} y &= \sqrt[3]{\mathrm{e}^{\sqrt{3^x}}} \ /\mathrm{id}^3 & y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\
\operatorname{tg}^3 y &= \mathrm{e}^{\sqrt{3^x}} \ /\ln \circ & \\
\ln \operatorname{tg}^3 y &= \sqrt{3^x} \ /\mathrm{id}^2 \restriction_{\langle 0;\infty)} \circ & \operatorname{tg}^3 y > 0 \\
\ln^2 \operatorname{tg}^3 y &= 3^x \ /\log_3 \circ & \ln \operatorname{tg}^3 y \geq 0 \\
\log_3 \ln^2 \operatorname{tg}^3 y &= x & \ln^2 \operatorname{tg}^3 y > 0.
\end{aligned}$$

Dořešením podmínek pro y zjistíme definiční obor funkce f^{-1}, který bude $\mathcal{D}(f) = (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$. Inverzní funkcí k f je tedy funkce daná předpisem

$$f^{-1}(x) = \log_3 \ln^2 \operatorname{tg}^3 x,\ x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ukážeme si ještě jiný způsob řešení úlohy. Předpis vnitřní funkce $x \mapsto \sqrt[3]{\mathrm{e}^{\sqrt{3^x}}}$ můžeme upravit na

$$\sqrt[3]{\mathrm{e}^{\sqrt{3^x}}} = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3^x}}{3}} = \mathrm{e}^{\sqrt{3^{x-2}}} = \mathrm{e}^{3^{\frac{x}{2}-1}}.$$

Pokud budeme úlohu řešit v tomto tvaru, dostáváme

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{3^{\left(\frac{x-2}{2}\right)}} \Big/ \operatorname{tg} \restriction_{\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \circ & & \\ \operatorname{tg} y &= \mathrm{e}^{3^{\left(\frac{x-2}{2}\right)}} / \ln \circ & & y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \ln \operatorname{tg} y &= 3^{\left(\frac{x-2}{2}\right)} / \log_3 \circ & & \operatorname{tg} y > 0 \\ \log_3 \ln \operatorname{tg} y &= \frac{x-2}{2} & & \ln \operatorname{tg} y > 0 \\ 2 \log_3 \ln \operatorname{tg} y + 2 &= x. & & \end{aligned}$$

Rovnici můžeme upravit a dostaneme

$$2 \log_3 \ln \operatorname{tg} y + 2 = 2 \log_3 \ln \operatorname{tg} y + 2 \log_3 3 = 2 \log_3 3 \ln \operatorname{tg} y = \log_3 \ln^2 \operatorname{tg}^3 y = x.$$

Podmínky, které vznikly při řešení úlohy omezí definiční obor inverzní funkce stejně jako při řešení prvním způsobem. Dospěli jsme tedy ke stejnému řešení.

3.2 Neprosté funkce

Složitější jsou příklady, kde zadaná funkce vznikla složením elementárních funkcí, z nichž některé nejsou prosté. Nicméně do této úrovně obtížnosti zařadíme pouze příklady, kde se stále nesetkáme s aritmetickými operacemi. I takový jsme si již ukázali v příkladu 4. Pokud nechceme v zadání použít goniometrickou funkci, která zvyšuje obtížnost příkladu, jelikož ji nejde rozdělit na konečný počet restrikcí takových, že jsou prosté, využijeme mocninné funkce se sudým exponentem. Využít ji můžeme jako vnitřní funkce, i jako vnější funkce. Opět si ukážeme několik příkladů bez řešení.

- $f_1 : y = \ln x^{2k},\ k \in \mathbb{N}$
- $f_2 : y = \ln^{2k} x,\ k \in \mathbb{N}$
- $f_3 : y = \sqrt[2n+1]{x^{2k}},\ k, n \in \mathbb{N}$
- $f_4 : y = a^{x^{2k}},\ a \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}.$

Příklad 23. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \ln^2 x^2$.

Řešení. V tomto případě jde o vnitřní i vnější složení funkce ln s funkcí id^2. Funkčním kalkulem bychom funkci mohli zapsat $f = \mathrm{id}^2 \circ \ln \circ \, \mathrm{id}^2$. Definiční obor funkce je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Řešíme známým způsobem, tedy postupným vyjádřením x z rovnice $y = \ln^2 x^2$. Dostáváme

$$y = \ln^2 x^2$$

$$|x| \geq 1: \qquad \begin{aligned} y &= \ln^2 x^2 \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ \sqrt{y} &= \ln x^2 \, / \exp \circ \quad y \geq 0 \\ \mathrm{e}^{\sqrt{y}} &= x^2. \end{aligned}$$

$$x \geq 0: \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{\sqrt{y}} &= x^2 \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ \sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}} &= x, \quad \mathrm{e}^{\sqrt{y}} \geq 0. \end{aligned}$$

$$x \leq 0: \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{\sqrt{y}} &= x^2 \Big/ - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ -\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}} &= x, \quad \mathrm{e}^{\sqrt{y}} \geq 0. \end{aligned}$$

$$|x| \leq 1: \qquad \begin{aligned} y &= \ln^2 x^2 \Big/ - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ -\sqrt{y} &= \ln x^2 \, / \exp \circ \quad y \geq 0 \\ \mathrm{e}^{-\sqrt{y}} &= x^2. \end{aligned}$$

$$x \geq 0: \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{-\sqrt{y}} &= x^2 \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ \sqrt{\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}} &= x, \quad \mathrm{e}^{-\sqrt{y}} \geq 0. \end{aligned}$$

$$x \leq 0: \qquad \begin{aligned} \mathrm{e}^{-\sqrt{y}} &= x^2 \Big/ - \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\ -\sqrt{\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}} &= x, \quad \mathrm{e}^{-\sqrt{y}} \geq 0. \end{aligned}$$

Dvojitým složením s neprostou funkcí se nám tak původní funkce rozpadla na čtyři prosté restrikce a předpisy inverzních funkcí jsou

$$\begin{cases} (f\restriction_{(-\infty;-1\rangle})^{-1}(x) & = -\sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}} \\ (f\restriction_{\langle -1;0)})^{-1}(x) & = -\sqrt{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} \\ (f\restriction_{(0;1\rangle})^{-1}(x) & = \sqrt{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} \\ (f\restriction_{\langle 1;\infty)})^{-1}(x) & = \sqrt{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}. \end{cases}$$

Definiční obor všech těchto inverzí je shodný a $\mathcal{D} = \mathcal{H}(f) = \langle 0; \infty)$.

3.3 Složení s algebraickou funkcí

Poslední kateogrí úloh jsou takové, kde zadaná funkce vznikla složením algebraické funkce a funkce z tabulky 2.1. Pokud bude algebraická funkce vnitřní skládáme vnitřní funkce lineárni, kvadratické, lineární lomené, kvadratické lomené s vnějšími funkcemi z tabulky 2.1. Příklady takových funkcí jsou

- $f_1 : y = \ln(x-7)$
- $f_2 : y = \log_5(x^2+7x-1)$
- $f_3 : y = \mathrm{e}^{3x^2+x-5}$
- $f_4 : y = 7^{\frac{1}{x+2}}$
- $f_5 : y = \ln\sqrt[3]{\frac{x+7}{x-5}}$
- $f_6 : y = \ln\frac{1}{x^2-5}$
- $f_7 : y = \arcsin\sqrt{x+1}$
- $f_8 : y = \arcsin(x^2+5x-2)$
- $f_9 : y = \operatorname{arccotg}\frac{x}{1-x^2}$.

V opačném případě, kdy budeme skládat algebraickou funkci s vnitřní základní elementární funkcí, dostáváme například

- $g_2 : y = \frac{1}{3-\ln^2 x}$

- $g_3 : y = \sqrt{2^x + 3}$
- $g_4 : y = \sqrt{\arcsin x}$
- $g_5 : y = \sqrt{e^x} + \sqrt{e^x + 1}$
- $g_6 : y = \sqrt{2^x + 4^x}$
- $g_7 : y = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x + 2}$[i].

Příklad 24. Nalezněte inverzní funkci k funkci $g : y = \arcsin^2 x + \arcsin x - 2$.

Řešení. Při řešení budeme postupovat velmi podobně jako u samotné kvadratické funkce. Definiční obor funkce je $\mathcal{D}(g) = \mathcal{H}(g^{-1}) = \langle -1; 1\rangle$. Úpravami rovnice $y = \arcsin^2 x + \arcsin x - 2$ dostaneme

$$\left(\arcsin x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4}.$$

Nyní musíme řešit nerovnice $\arcsin x \geq -\frac{1}{2}$ a $\arcsin x \leq -\frac{1}{2}$. Řešením první je $x \in \left\langle -\sin\frac{1}{2}; 1\right\rangle$, druhé potom $x \in \left\langle -1; -\sin\frac{1}{2}\right\rangle$. Určili jsme tedy intervaly prostoty funkce. Pro restrikci na první interval dostaneme

$$\begin{aligned}
\left(\arcsin x + \frac{1}{2}\right)^2 &= y + \frac{9}{4} \Big/ \mathrm{id}^{\frac{1}{2}} \circ \\
\arcsin x + \frac{1}{2} &= \sqrt{y + \frac{9}{4}} && y \geq -\frac{9}{4} \\
\arcsin x &= \sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2} \Big/ \sin \restriction_{\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle} \circ \\
x &= \sin \sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2} && \sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2} \in \left\langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Dořešíme podmínky, ze kterých dostaneme $y \in \left\langle -\frac{9}{4}; \frac{\pi^2+2\pi-8}{4}\right\rangle$. Pro druhou restrkci složíme rovnici s funkcí $-\mathrm{id}^{\frac{1}{2}}$ a dále řešíme analogicky. Předpisy inverzních funkcí jsou potom

$$\begin{cases}
(g \restriction_{\left\langle -1; -\sin\frac{1}{2}\right\rangle})^{-1}(x) &= \sin\left(-\sqrt{x + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2}\right),\ x \in \left\langle -\frac{9}{4}; \frac{\pi^2-2\pi-8}{2}\right\rangle \\
(g \restriction_{\left\langle -\sin\frac{1}{2}; 1\right)})^{-1}(x) &= \sin\left(\sqrt{x + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2}\right),\ x \in \left\langle -\frac{9}{4}; \frac{\pi^2+2\pi-8}{4}\right\rangle.
\end{cases}$$

[i] Jelikož $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, jedná se o složení vnější funkce kvadratické lomené, s vnitřní funkcí sin.

Ukážeme si ještě jeden příklad.

Příklad 25. Nalezněte inverzní funkci k funkci $f : y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Řešení. Na začátku úlohy je třeba předpis funkce upravit tak, abychom mohli dále řešit úlohu nám známými prostředky:

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2\mathrm{e}^x}.$$

Nyní vyjádříme x z rovnice $y = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2\mathrm{e}^x}$. Jelikož se jedná o vnější lineární lomenou funkci složenou s vnitřní exponenciální funkcí, nebude to problém. Dostáváme

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2\mathrm{e}^x} \\ (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 &= 0 \\ (\mathrm{e}^x - y)^2 &= 1 + y^2. \end{aligned}$$

Nyní rozlišíme dva případy. Nejdříve budeme řešit úlohu pro $\mathrm{e}^x - y \leq 0$. Za y dosadíme a dosteneme $\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \leq 0$. Tato nerovnost není splněna nikdy, naopak nerovnost $\mathrm{e}^x - y \geq 0$ bude splněna pro každé reálné x. Řešení je potom funkce daná předpisem

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right).$$

Úloha je významná proto, že při jejím řešení se zdá, že funkce f je neprostá, a až při hledání intrvalů prostoty funkce zjistíme, že se jedná o funkci prostou. Řešení úlohy se tímto ztěžuje, jelikož se jedná o nestandardní problém při hledání inverzní funkce.

Závěr

V práci se mi podařilo popsat základní vlastnosti inverzních funkcí a tyto vlastnosti dokázat. Ukázal jsem také postupy při řešení úloh na hledání inverzní funkce. Dále jsem ukázal typy funkcí, které lze využít při návrhu úlohy na hledání inverzní funkce a některé konkrétní postupy návrhu úloh. Práci by bylo možné rozšířit o podrobnější postupy návrhu úlohy, ideálně dovedené do formy algoritmu.

Literatura

[1] BRABEC, Jiří, MARTAN, František, ROZENSKÝ, Zdeněk. *Matematická analýza I.* Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1985. 488 s.

[2] COUFAL, Jan, KLŮFA, Jindřich. *Matematika pro ekonomické fakulty.* Praha : EKOPRESS, 2000. 405 s. ISBN 80-86119-30-0.

[3] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I.* Vydání 7. nezměněné. Praha : Academia, 1984. 392 s. ISBN 21-003-84.

[4] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet II.* Vydání 4. Praha : Academia, 1984. 669 s. ISBN 21-017-84.

[5] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia - Funkce.* Dotisk 2. vydání. Praha : Prometheus, 1996. 160 s. ISBN 80-85849-09-7.

[6] REKTORYS, Karel a kol. *Přehled užité matematiky I.* 6. přepracované vydání. Praha : Prometheus, 1995. 160 s. ISBN 80-85849-92-5.

[7] RICHTER, Jaroslav. *Webové stránky určené pro výuku funkcí na střední škole.* Praha, 2007. Dostupné z WWW: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jaroslav_richter/>. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Jarmila Robová, CSc.

[8] Risch, Robert Henry. Algebraic Properties of the Elementary Functions of Analysis. *American Journal of Mathematics*. Baltimore : The John Hopkins University Press, 1979, Vol. 101, No. 4, s. 743-759. ISSN 1080-6377

[9] Veselý, Jiří. *Základy matematické analýzy : první díl*. Praha : Matfyzpress, 2004. 264 s. ISBN 80-86732-29-0.

[10] Vitásek, Tomáš. *Elementární funkce a definiční obor*. Praha, 2012. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Mgr. Derek Pilous.

[11] ŽOLADEK, Henryk. The topological proof of Abel-Ruffini theorem. *Journal of the Juliusz Schauder Center*. 2000, Volume 16, s. 253-256. Dostupné z: http://www.tmna.ncu.pl/files/v16n2-02.pdf

[13] Inverse of composition of functions. Buck, Warren. *Planetmath.org* [online]. 11.2.2008, 22.3.2013 [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: http://planetmath.org/inverseofcompositionoffunctions